走向国际数学奥林匹克的

平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解（上）

PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

$$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|\cdot d = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}) = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}$$

主编　沈文选

哈爾濱工業大學出版社

$\sum_{i=0}^{11}$ 刘培杰
数学工作室

ISBN 978-7-5603-2441-8

9 787560 324418 >

定价 68.00 元(上、下)

上架建议：奥数+几何+科普

ZOUXIANG GUOJI SHUXUE AOLINPIKE DE PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

LIJIE QUANGUO GAOZHONG SHUXUE LIANSAI PINGMIAN JIHE SHITI YITIDUOJIE

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解

(上)

主　编　沈文选

副主编　杨清桃　步凡　昊凡

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

全书对 1978~2006 年间的全国高中数学联赛(包括全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛)、中国数学奥林匹克(CMO,即全国中学生数学冬令营)、中国国家队队员选拔赛中的一百余道平面几何试题进行了诠释,每道试题给出了尽可能多的解法(多的近 30 种解法)及命题背景,以 70 个专题讲座的形式对试题所涉及的有关知识或相关背景进行了深入地探讨,揭示了平面几何试题的有关命题途径。该书极大地拓展了读者的视野,可全方位地开启读者的思维,扎实地训练其基本功。该书适合于广大数学爱好者,初、高中数学竞赛选手,初、高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释.上:历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解/沈文选主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2441-8

Ⅰ.走… Ⅱ.沈… Ⅲ.平面几何-高中-解题
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 147212 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 唐 蕾
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 总印张 55 总字数 955 千字
版 次 2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2441-8
印 数 1~4 000 册
定 价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前　言

在国际数学奥林匹克(IMO)中,中国学生的突出成绩已得到举世公认。这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是龙的传人潜质的反映,它实现民族振兴的希望,它折射国家富强的未来。

回顾我国的数学奥林匹克的发展过程,可以说是一个由小到大的发展过程,是一个由单一到全面的发展过程。在开始举办数学奥林匹克活动时,只限于少数的几个城市内的单独行动,而今天举办的数学奥林匹克活动,几乎遍及了全国各省、区、市,这是一种规模最大,种类与层次最多的学科竞赛活动,有各省、市的初、高中竞赛,有全国的初、高中联赛,还有全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛、“希望杯”邀请赛以及中国数学奥林匹克、国家队选拔赛,等等(本书中的全国高中联赛题、中国数学奥林匹克题、国家队选拔赛题分别用 A、B、C 表示)。

数学奥林匹克活动的中心环节是试题的命制,而平面几何能够提供各种层次、各种难度的试题,是数学奥林匹克的一个方便而丰富的题源,因而在各种类别、层次的数学奥林匹克活动中,平面几何试题始终占据着重要地位,随着活动级别的升高,平面几何试题分量也随之加重,甚至占到总题量的三分之一。因此,诠释走向 IMO 的平面几何试题,也是数学奥林匹克理论深入研究的一个重要方面。

诠释这些平面几何试题，可以使我们更清楚地看到平面几何试题具有重要的检测作用与开发价值：

它可以检测应试者所形成的科学世界观和理性精神（平面几何知识是人们认识自然、认识现实世界的中介与工具，这种知识对于人的认识形成有较强的功用，是一种高级的认识与方法论系统）的某些侧面。

它可以检测应试者所具有的思维习惯（平面几何材料具有深刻的逻辑结构、丰富的直观背景和鲜明的认知层次，处理时思维习惯的优劣对效果产生较大影响）。

它可以检测应试者的演绎推理和逻辑思维能力（平面几何内容的直观性、难度的层次性、真假的实验性、推理过程的可预见性，成为训练逻辑思维和演绎推理的理想材料）的某些侧面。

试题内容的挑战性具有开发价值。平面几何是一种理解、描述和联系现实空间的工具（几何图形保持着与现实空间的直接的丰富联系；几何直觉在数学活动中常常起着关键的作用；几何活动常常包含创造活动的各个方面，从构造猜想、表示假设、探寻证明、发现特例和反例到最后形成理论等，这些在各种水平的几何活动中都得到反映）。

试题内容对进行创新教育具有开发价值。平面几何能为各种水平的创造活动提供丰富的素材（几何题的综合性便于学生在学习时能够借助于观察、实验、类比、直觉和推理等多种手段；几何题的层次性使得不同能力水平的学生都能从中得到益处；几何题的启发性可以使学生建立广泛的联系，并把它应用于更广的领域）。

试题内容对开展数学应用与建模教育具有开发价值。平面几何建立了简单直观、能被青少年所接受的数学模型，并教会他们用这样的数学模型去思考、探索、应用。点、线、面、三角形、四边形和圆——这是一些多么简单又多么自然的数学模型，却能让青少年沉醉在数学思维的天地里乐而忘返，很难想象有什么别的模型能够这样简单同时又这样有成效。平面几何又可作为多种抽象数学结构的模型（许多重要的数学理论都可以通过几何的途径以自然的方式组织起来，或者从几何模型中抽象出来）。

诠释这些平面几何试题，可以使我们更理性地领悟到：几何概念为抽象的科学思维提供直观的模型，几何方法在所有的领域都有广泛的应用，几何直觉是“数学地”理解高科技和解决问题的工具，几何的公理系统是组织科学体系的典范，几何思维习惯则能使一个人终身受益。

诠释这些平面几何试题，可以使我们更深刻地认识到：奥林匹克数学的综

合基础性、实验发展性、创造问题性、艺趣挑战性等体系特征。

许多试题有着深刻的高等几何(如仿射几何、射影几何、几何变换等)和组合几何背景,它是高等数学思想与中学数学的精妙技巧相结合的基础性综合数学问题;试题中所涵盖的许多新思想、新方法,不断地影响着中学数学,从而促进中学数学课程的改革,为中学数学知识的更新架设了桥梁,为现代数学知识的传播和普及提供了科学的测度;许多试题既包含了传统数学的精华,又体现出很大的开放性、发展性、挑战性。

诠释这些平面几何试题,作者作为一种尝试,首先给出试题的尽可能多的解法,然后从试题所涉及的有关知识,或者有关背景进行深入地探讨,企图扩大读者的视野,开启思维,训练基本功。作者为图“文无遗珠”的效果,大量参考了多家书刊杂志中发表的解法与探讨,并在书中加以注明,在此向他们表示谢意。

在本书的撰写过程中,得到了周宇、羊明亮、肖登鹏、吴仁芳、彭熹、汤芳、张丹、陈丽芳、梁红梅、唐祥德、刘洁、陈明、刘文芳等的帮助,他们帮助收集资料、抄录稿件、校对清样,付出了辛勤的汗水,在此也表示感谢。

限于作者的水平,书中的疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

沈文选

2006年10月于长沙

目　录

第1章　1978年试题的诠释 …………………………… (1)

第1节　与三角形有关的十个基本定理 ……………………… (4)
第2节　直线束截平行线分线段成比例定理………………… (14)
第3节　完全四边形的优美性质(一) ……………………… (18)
第4节　凸四边形中的截割线问题 ………………………… (31)

第2章　1979年试题的诠释………………………………… (47)

第1节　几个平行四边形判定的假命题 …………………… (49)
第2节　面积平分问题 ……………………………………… (50)
第3节　平移变换 …………………………………………… (58)
第4节　相交两圆的性质 …………………………………… (61)

第3章　1981年试题的诠释………………………………… (66)

第1节　反射变换 …………………………………………… (73)
第2节　球台上的数学 ……………………………………… (82)

第 4 章　1982 年试题的诠释 …………………………………（85）

第 1 节　局部调整策略及运用 ……………………………（92）
第 2 节　三角形中的极值点问题 …………………………（97）

第 5 章　1983 年试题的诠释 ……………………………（104）

第 1 节　直线束截直线分线段比问题 ……………………（111）
第 2 节　凸(凹)四边形的几个问题………………………（119）

第 6 章　1984 年试题的诠释 ……………………………（127）

第 1 节　三角形的与其边平行的内接平行四边形问题 ……（131）
第 2 节　三角形平行剖分图性质与三角形剖分问题………（137）

第 7 章　1985 ~ 1986 年度试题的诠释 …………………（144）

第 1 节　点距比问题 ………………………………………（158）
第 2 节　倍角三角形问题 …………………………………（162）
第 3 节　与三角形内心有关的几个问题 …………………（175）
第 4 节　正方形中含 45°的三角形问题 …………………（177）

第 8 章　1986 ~ 1987 年度试题的诠释 …………………（191）

第 1 节　三角形的高线垂足三角形问题 …………………（215）
第 2 节　图形覆盖问题 ……………………………………（229）

第 9 章　1987 ~ 1988 年度试题的诠释 …………………（241）

第 1 节　旋转变换……………………………………………（256）
第 2 节　角元形式塞瓦定理的推论的推广及应用 ………（260）
第 3 节　直角三角形中的几个问题………………………（265）

第 10 章　1988 ~ 1989 年度试题的诠释 ………………… (272)

第 1 节　三角形的界心问题 ………………………………… (284)
第 2 节　三角形的内接三角形问题………………………… (292)

第 11 章　1989 ~ 1990 年度试题的诠释 ………………… (305)

第 1 节　阿基米德折弦定理(共点两弦折弦中点定理) …… (326)
第 2 节　圆中张角定理(共点三弦夹角定理) …………… (329)
第 3 节　圆内接凸 n 边形的正弦定理……………………… (337)
第 4 节　圆中蝴蝶定理的一些证法及圆中蝴蝶定理的衍化 … (340)
第 5 节　四边形中蝴蝶定理的一些问题(推广与演变) …… (350)

第 12 章　1990 ~ 1991 年度试题的诠释 ………………… (359)

第 1 节　卜拉美古塔定理的推广及应用 ………………… (368)
第 2 节　对角线互相垂直的圆内接四边形问题 ………… (370)

第 13 章　1991 ~ 1992 年度试题的诠释 ………………… (377)

第 1 节　嵌入三角形的平行四边形问题 ………………… (382)
第 2 节　关于三角形外心的几个充要条件 ……………… (385)

第 14 章　1992 ~ 1993 年度试题的诠释 ………………… (389)

第 1 节　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形问题 …… (399)
第 2 节　圆内接四边形的两个充要条件 ………………… (406)
第 3 节　垂心余弦定理及应用 …………………………… (411)

第 1 章　1978 年试题的诠释

这一年全国高中数学联赛第二试的平面几何试题共有 3 道，即第 1、4、6 题.

试题 A1　四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行. 证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段.

如图 1.1，四边形 $ABCD$ 的两组对边延长后分别交于点 E、F，$EF /\!/ BD$，直线 AC 与 EF 交于点 G.

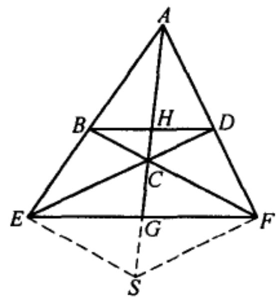


图 1.1

证法 1　过 E 作 $ES /\!/ BF$ 交 AC 的延长线于点 S，则 $\frac{AC}{AS}=\frac{AB}{AE}$，又因 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}$，有 $\frac{AC}{AS}=\frac{AD}{AF}$.

联结 SF，则 $ED /\!/ SF$. 从而，$CESF$ 是平行四边形. 故 $EG=GF$.

证法 2　设 AC 与 BD 交于点 H，由题设，有

$$\frac{DH}{FG}=\frac{AH}{AG}=\frac{HB}{GE},\quad \frac{DH}{GE}=\frac{HC}{CG}=\frac{HB}{FG}$$

亦即

$$\frac{DH}{FG}=\frac{HB}{GE},\quad \frac{DH}{GE}=\frac{HB}{FG}$$

上述两式相除得

$$\frac{GE}{FG}=\frac{FG}{GE}$$

即知

$$EG=GF$$

证法 3　对 $\triangle AEF$ 及点 C 应用塞瓦定理，有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FD}{DA}=1 \qquad (*)$$

又由 $BD /\!/ EF$，有 $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$，即 $\frac{AB}{BE}\cdot\frac{FD}{DA}=1$，从而由式 $(*)$，有 $\frac{EG}{GF}=1$，故 $EG=GF$.

证法 4 如图 1.1,设$\angle AED=\alpha$,$\angle DEF=\beta$.

以 E 为视点,分别对 B、C、F,A、D、F 及 A、C、G 应用张角公式,得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EB} \quad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EA} \quad ②$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EG}+\frac{\sin\beta}{EA} \quad ③$$

因 $BD /\!/ EF$,则知$\angle BDE=\beta$.

在$\triangle BED$ 中,由正弦定理,得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\beta}{EB} \quad ④$$

由①+②-③-④,得

$$\frac{2\sin\alpha}{EF}=\frac{\sin\alpha}{EG}$$

从而 $EF=2EG$,故 $EG=GF$.

注 (1)由此题可得梯形的一条性质:对于梯形两腰延长线的交点、两条对角线的交点、上底与下底的中点这四点,若一条直线过其中两点,则也必过其余两点,或者说这四点在一条直线上.

(2)此题包含了射影几何中的一个基本定理,也包含仿射几何的一个基本原理,可参见图 1.23.

试题 A2 设 $ABCD$ 为任意给定的四边形,边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H. 证明:$S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC)$.

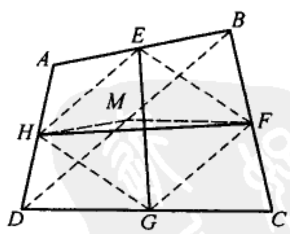


图 1.2

证法 1 如图 1.2,联结 HE、DB、GF、EF、HG,则 $HE /\!/ DB /\!/ GF$,同理 $EF /\!/ HG$,故 $EFGH$ 为平行四边形. 易证 $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$,由于 $EFGH$ 为平行四边形,$S_{EFGH}\leqslant\frac{1}{2}EG\cdot HF$,从而 $S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF$.

设 M 为 BD 的中点,显然有

$$\frac{1}{2}(AB+CD)=HM+MF\geqslant HF$$

同理
$$\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant EG$$
从而
$$EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC)$$
故结论获证.

证法 2　如图 1.3(a),将四边形 $ABCD$ 分成四块,重新拼成图 1.3(b)中的平行四边形.易知其面积小于等于两边乘积,其两边分别是原四边形的两条对边中点的连线,这就证明了第一个不等式.

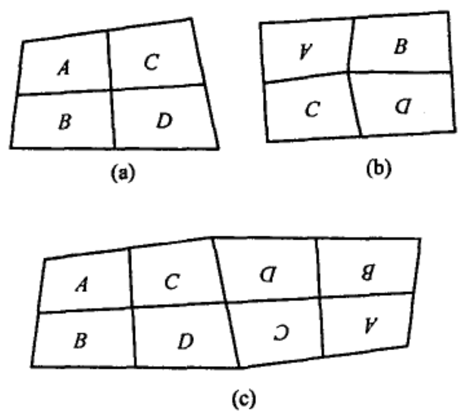


图 1.3

再将原四边形扩充一倍,拼成图 1.3(c)形状,易知结论获证.

注　关于此试题的背景如下.

(1)从数学的角度看.1953 年第 16 届莫斯科数学竞赛中有这样一道试题,设四边形四边的长分别为 a、b、c、d,面积为 S,求证:$S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.将此不等式隔离,便得到如上试题 A2.

(2)从实际问题的角度看.华罗庚教授指出①,是一个量地问题,一块四边形的土地要丈量它的面积.解放前,北方地主是用两组对边中点连线长度的乘积作为面积,而南方地主是用两组对边边长平均值的乘积作为面积.这两种量法都把土地面积量大了,农民就得多交租.实际上,四边形真正的面积小于等于两组对边中点连线长度的乘积小于等于两组对边边长平均值的乘积.

① 华罗庚.全国中学数学竞赛题解[M].北京:科学普及出版社,1978:1-2.

试题 A3 设有一边长为 1 的正方形,试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的,并求出这两个三角形面积(要证明你的论断).

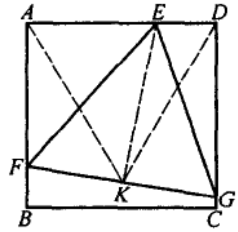


图 1.4

解 假设$\triangle EFG$为正方形$ABCD$的任一内接正三角形,如图 1.4 所示,由于正三角形的三个顶点必落在正方形的三边上,所以不妨设其中的 F、G 是在正方形的一组对边上.

作$\triangle EFG$ 的边 FG 上的高 EK,则 E、K、G、D 四点共圆.联结 KD,则知$\angle KDE=\angle EGK=60°$.

同理,联结 AK,由 E、K、F、A 四点共圆,则有$\angle KAE=\angle EFK=60°$,所以,$\triangle KDA$ 为正三角形,而 K 是它的一个顶点.

由此可知,内接正$\triangle EFG$ 的边 FG 的中点必是不动点 K.

又正三角形的面积由边长决定,当 $KF\perp AB$ 时,边长为 1,这时边长最小,而面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$也最小;当 KF 通过点 B(或 C)时,边长为 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$,这时边长最大,面积 $S=2\sqrt{3}-3$ 也最大.

第 1 节 与三角形有关的十个基本定理

1.与三角形三边所在直线上的三点有关的两个定理

定理 1 设 A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线(包括三边的延长线)上的点,则 A'、B'、C'三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1 \qquad ①$$

证明 必要性:如图 1.5,过 A 作直线 $AD\mathbin{/\!/}C'A'$ 交 BC 的延长线于 D,则

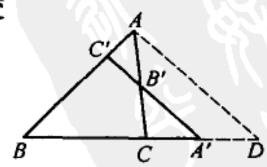


图 1.5

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$$

故
$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1$$

充分性:设直线 $A'B'$交 AB 于 C_1,则由必要性得到

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

又由题设有$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$,于是

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$$

由合比定理,得

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$$

从而 C_1 与 C' 重合,故 A'、B'、C' 三点共线.

注　(1)上述定理中,若采用有向线段,则式①右边为 -1.

(2)定理中的必要性即为梅涅劳斯定理,充分性即为梅涅劳斯定理的逆定理.

定理 1 的角元形式　设 A'、B'、C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点,则 A'、B'、C' 三点共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1 \qquad ①'$$

事实上,注意到

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\sin\angle BAA'}{AC\sin\angle A'AC}$$

等三式及式①即可得式①′.

定理 2　设 A'、B'、C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点(即三点中或三点或一点在边上),则三直线 AA'、BB'、CC' 共点或平行的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1 \qquad ②$$

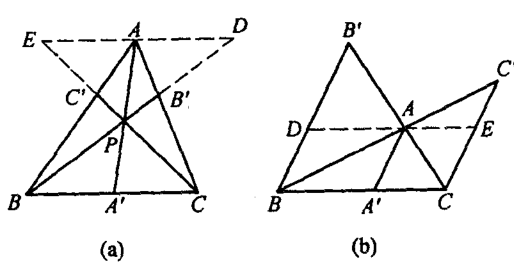


图 1.6

证明　必要性:若 AA'、BB'、CC' 交于一点 P,则过 A 作 BC 的平行线分别

交 BB'、CC' 的延长线于 D、E,如图 1.6(a)所示,得

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD},\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$$

又由

$$\frac{BA'}{AD}=\frac{A'P}{PA}=\frac{A'C}{EA}$$

有

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{AD}{EA}$$

从而

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{AD}{EA}\cdot\frac{BC}{AD}\cdot\frac{EA}{BC}=1$$

若 AA'、BB'、CC' 三线平行,如图 1.6(b)所示,可类似证明(略).

充分性:若 AA' 与 BB' 交于点 P,设 CP 与 AB 的交点为 C_1,则由必要性知

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

而题设有

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

由此有

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$$

即 C_1 与 C' 重合,从而 AA'、BB'、CC' 三线共点.

若 $AA'/\!/BB'$,则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB}{BA}$,代入已知条件 $\frac{AC'}{C'B}=\frac{A'C}{CB}$. 由此知 $CC'/\!/AA'$,故 $AA'/\!/BB'/\!/CC'$.

注 (1)上述定理中,若采用有向线段,则式②右边仍为 1.

(2)定理中的必要性即为塞瓦定理,充分性即为塞瓦定理的逆定理,其中的交点 P 有时也称为塞瓦点.

定理 2 的角元形式 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点,则 AA'、BB'、CC' 共点或平行的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1 \qquad ②'$$

其证明与式①′完全相同.

推论 设 A_1、B_1、C_1 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆三段弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 上的点,AA_1、BB_1、CC_1 共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1 \qquad ②''$$

事实上,可设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,AA_1 交 BC 于 A',则

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}$$

同理还有两式，再应用式②′，即证得式②″.

2. 与三角形一顶点引出的射线上的点有关的两个定理

定理 3　设点 P 为从$\triangle ABC$ 的顶点 A 引出的一条射线 AP 上的点，线段 BP、PC 对点 A 的张角分别为 α、β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 B、P、C 共线的充要条件是

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB} \quad ③$$

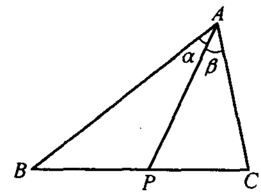


图 1.7

证明　如图 1.7，有

B、P、C 三点共线$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=$$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\beta\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$$

注　定理 3 的必要性即为张角定理，充分性即为张角定理的逆定理，点 A 常称为视点.

定理 4　设点 P 为从$\triangle ABC$ 的顶点 A 引出的一条射线 AP 上的点，则 B、P、C 共线的充要条件是

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC \quad ④$$

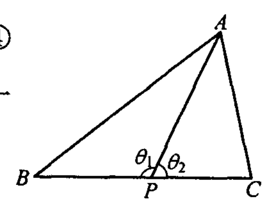


图 1.8

证明　如图 1.8，设$\angle APB=\theta_1$，$\angle APC=\theta_2$，不失一般性，设 $\theta_2<90°$.

对于$\triangle ABP$ 和$\triangle APC$ 分别应用余弦定理，有

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos\theta_1$$

$$AC^2=AP^2+CP^2-2AP\cdot CP\cdot\cos\theta_2$$

将上述两式分别乘以 PC、PB 后相加，得

$$AB^2\cdot CP+AC^2\cdot BP=AP^2(BP+CP)+BP\cdot CP(BP+CP)-2AP\cdot BP\cdot CP(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \quad (*)$$

于是　　B、P、C 共线$\Leftrightarrow$式$(*)$右边$=AP^2\cdot BC+BP\cdot CP\cdot BC\Leftrightarrow$

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot PC$$

注 (1)定理4的必要性即为斯特瓦尔特定理,充分性即为斯特瓦尔特定理的逆定理.

(2)若点 P 在 BC 的延长线上,则

$$AP^2 = -AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} + BP \cdot PC$$

若点 P 在 BC 的反向延长线上时,则

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} - AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot PC$$

推论 (1)若 $AB = AC$,则 $AP^2 = AB^2 - BP \cdot PC$.

(2)若 P 为 BC 中点,则 $AP^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

(3)若 AP 平分 $\angle BAC$,则 $AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$.

(4)若 AP 平分 $\angle BAC$ 的外角,则 $AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$.

3.与三角形形外一点有关的两个定理

定理5 从 $\triangle ABC$ 形外一点 D 与三顶点连线,则点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆上的充要条件是

$$AB \cdot DC + AC \cdot BD = BC \cdot AD \qquad ⑤$$

证明 必要性:如图1.9,D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,在 BC 上取点 P,使

$$\angle PAB = \angle CAD$$

则 $$\triangle ABP \backsim \triangle ADC$$

于是 $$AB \cdot CD = AD \cdot BP$$

又 $$\triangle ABD \backsim \triangle APC$$

有 $$BD \cdot AC = AD \cdot PC$$

故 $$AB \cdot DC + AC \cdot BD = AD(BP + PC) = AD \cdot BC$$

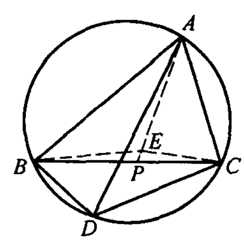


图1.9

充分性:在凸四边形 $ABCD$ 内取点 E,使

$$\angle BAE = \angle CAD, \angle ABE = \angle ADC$$

则 $$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$$

即 $$AB \cdot DC = AD \cdot BE$$

又注意到 $\angle CAE = \angle DAB$ 及上述比例式,有 $\triangle ACE \backsim \triangle ADB$,亦有

$$AC \cdot BD = AD \cdot EC$$

从而 $$AB \cdot DC + AC \cdot BD = AD(BE + EC) \geqslant AD \cdot BC$$

其中等号当且仅当 E 在 BC 上，即 $\angle ABC=\angle ADC$，即 A、B、D、C 四点共圆时成立.

注　(1)定理5的必要性即为托勒密定理，充分性即为托勒密定理的逆定理.

(2)由托勒密定理可得到三角形中的射影定理.

定理6　从 $\triangle ABC$ 形外一点 D 引三边 BC、AB、AC 所在直线的垂线，垂足是 L、M、N，则点 D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上的充要条件是 L、M、N 共线，即

$$LN=LM+MN \tag{6}$$

证明　如图1.10，联结 BD、AD，分别由 D、B、L、M，D、M、A、N 四点共圆，有

$$\angle BML=\angle BDL,\angle ADM=\angle AMN$$

又 D、B、C、A 共圆 $\Leftrightarrow \angle DBL=\angle DAN \Leftrightarrow \angle BML=\angle AMN \Leftrightarrow L$、$M$、$N$ 共线 $\Leftrightarrow LN=LM+MN$.

注　上述定理的必要性即为西姆松定理，充分性即为西姆松定理的逆定理，直线 LMN 称为西姆松线.

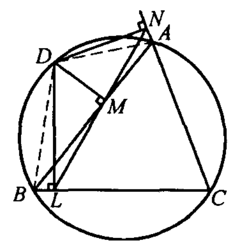


图1.10

4. 与三角形的边、角相关的两个定理

定理7(正弦定理)　在 $\triangle ABC$ 中，若角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c，其面积记为 $S_{\triangle ABC}$，则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2S_{\triangle ABC}} \tag{7}$$

事实上，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$，同除以 $\frac{1}{2}abc$，即得.

注　由 $S_{\triangle ABC}=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R^2\sin A\sin B\sin C$，令式⑦中比值为 k，由此，则可求得 $k=2R$.(R 为 $\triangle ABC$ 外接圆直径)

定理8(余弦定理)　在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c，则

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned} \tag{8}$$

证明　仅证第一式，且设 $\angle C\geqslant 90^\circ$(当 $\angle C<90^\circ$ 时可同样证明)，如图1.11所示.

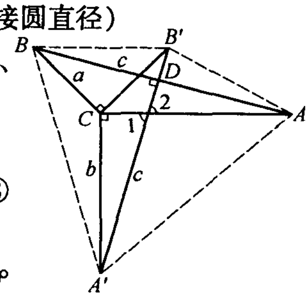


图1.11

将$\triangle ABC$绕顶点C顺时针方向旋转$90°$得$\triangle A'B'C$,注意到

$$\angle BCB'=90°,\angle ACA'=90°,\angle A'=\angle A,\angle 1=\angle 2$$

则$\angle A'DA=90°$(D为AB与$A'B'$的交点),且$A'B'=AB=c$,于是

$$S_{\triangle BA'B'}+S_{\triangle AB'A'}=S_{A'AB'B}=S_{\triangle BCB'}+S_{\triangle ACA'}+S_{\triangle BCA'}+S_{\triangle ACB'}$$

即
$$\frac{1}{2}c\cdot BD+\frac{1}{2}c\cdot AD=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab\sin[180°-(C-90°)]+\frac{1}{2}ab\cdot\sin(C-90°)$$

亦即
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

推论 在$\triangle ABC$中,若$\angle C=90°$,则$c^2=a^2+b^2$.

注 可类似得到其他式子.

5.与两个三角形边、角相关的两个比例定理

定理9(共边比例定理) 若$\triangle PAB$与$\triangle QAB$的顶点P、Q所在直线与直线AB的交点为M,则

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{PM}{QM} \tag{9}$$

证明 如图1.12,图形有4种情形.

对于图1.12(a),由P作$PE\perp$直线AB于E,由Q作$QF\perp$直线AB于F,则由

$$\text{Rt}\triangle PEM\backsim\text{Rt}\triangle QFM$$

有
$$\frac{PE}{QF}=\frac{PM}{QM}$$

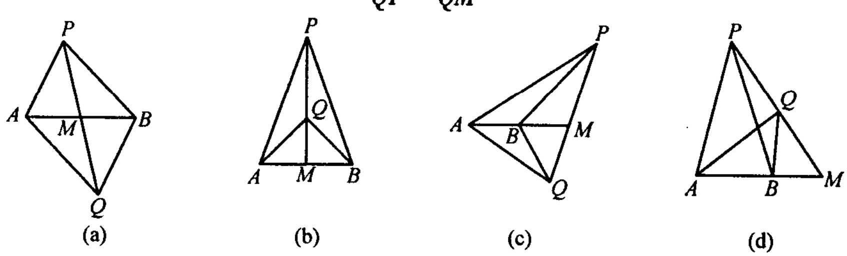


图1.12

于是
$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot PE}{\frac{1}{2}AB\cdot QF}=\frac{PE}{QF}=\frac{PM}{QM}$$

同理,可证得其他三种情况.

定理10(共角比例定理)　若在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$\angle A=\angle A'$或$\angle A+\angle A'=180^\circ$,则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'} \qquad ⑩$$

证明　不妨设$\angle A$与$\angle A'$重合或互为邻补角,如图1.13所示.

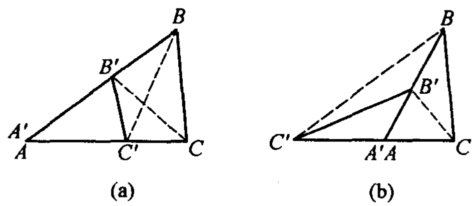


图1.13

联结$B'C$、BC',由共边比例定理,有

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C}}\cdot\frac{S_{\triangle AB'C}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$$

注　(1)也可由三角形面积公式推导

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC}{\frac{1}{2}A'B'\cdot A'C'\sin\angle B'A'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$$

(2)当$AC=A'C'$时,式⑩即为式⑨,即定理10也可看做定理9的一种推广

例　证明下述两个命题.

(1)已知AD、AE分别是$\triangle ABC$的内、外角平分线,点D在边BC上,点E在边BC的延长线上,求证:$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$.

(2)点M和N三等分$\triangle ABC$的边AC,点X和Y三等分边BC,AY与BM、BN分别交于点S、R.求证:$\frac{S_{SRNM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{5}{42}$.

证明　(1)设$AD=a$,$AE=b$,$\angle BAD=\angle DAC=\alpha$,以$A$为视点,分别在$\triangle ADE$和$\triangle ABE$中应用张角定理,得

$$\frac{\sin\angle DAE}{AC}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{a}$$

$$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{a}=\frac{\sin\angle DAE}{AB}=\frac{\sin\alpha}{b}$$

于是 $$AC=\frac{ab}{b\cos\alpha+a\sin\alpha},AB=\frac{ab}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}$$

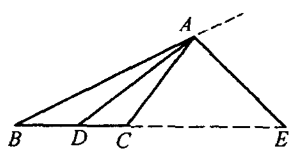
如图 1.14(a),在$\triangle ABE$中,由余弦定理,并注意到 $\cos\alpha>0$,以及 $b\cos\alpha-a\sin\alpha>0$(因 $AB>0$),有

$$BE=\sqrt{AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos(90^\circ+\alpha)}=\sqrt{\frac{b^2\cos^2\alpha(a^2+b^2)}{(b\cos\alpha-a\sin\alpha)^2}}=\frac{b\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}$$

同理 $$CE=\frac{b\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha+a\sin\alpha}$$

而 $$DE=\sqrt{a^2+b^2}$$

故 $$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2b\cos\alpha}{b\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{DE}$$



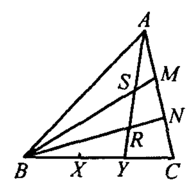


图 1.14

(2)如图 1.14(b),对$\triangle BMC$及截线 ASY,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BS}{SM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CY}{YB}=\frac{BS}{SM}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$$

则 $$\frac{BS}{SM}=6$$

从而 $$\frac{BS}{BM}=\frac{6}{7}$$

又对$\triangle BNC$及截线 ARY 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BR}{RN}\cdot\frac{NA}{AC}\cdot\frac{CY}{YB}=\frac{BR}{RN}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$$

即有 $$\frac{BR}{RN}=3$$

从而 $$\frac{BR}{BN}=\frac{3}{4}$$

由共角比例定理,有

$$\frac{S_{\triangle BSR}}{S_{\triangle BMN}}=\frac{BS\cdot BR}{BM\cdot BN}=\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{14}$$

从而
$$\frac{S_{SRNM}}{S_{\triangle BMN}}=\frac{5}{14}$$

又由共边比例定理,有
$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}$$

故
$$\frac{S_{SRNM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{5}{14}\cdot\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{42}$$

练　习　题

1. $\triangle ABC$ 中,$AB=2\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{2}$,$BC=2$,设 P 为边 BC 上任一点,则(　　)

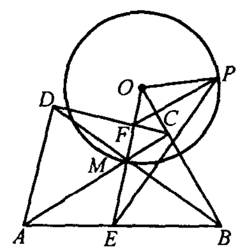
A. $PA^2<PB\cdot PC$

B. $PA^2=PB\cdot PC$

C. $PA^2>PB\cdot PC$

D. PA^2 与 $PB\cdot PC$ 的大小关系不确定

2. 设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 M,过 M 作 AD 的平行线分别交 AB、CD 于点 E、F,交 BC 的延长线于点 O,P 是以 O 为圆心,以 OM 为半径的圆上一点,如图所示.求证:$\angle OPF=\angle OEP$.



第 2 题

3. 设 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AC 和 AB 上,BD 与 CE 交于点 F,$AE=EB$,$\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$,$S_{\triangle ABC}=40$.求 S_{AEFD}.

练 习 题 解 答

1. 选 C. 理由:由斯特瓦尔特定理,有

$$PA^2=AB^2\frac{PC}{BC}+AC^2\frac{PB}{BC}-PB\cdot PC=4PC+PB-PB\cdot PC$$

从而
$$PA^2-PB\cdot PC=4PC+PB-2PB\cdot PC$$

又
$$PB=2-PC$$

于是
$$PA^2-PB\cdot PC=2PC^2-PC+2=2(PC-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{8}>0$$

故
$$PA^2 > PB \cdot PC$$

2. 直线 OCB 分别与 $\triangle DMF$ 和 $\triangle AEM$ 的三边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{DB}{MB} \cdot \frac{MO}{FO} \cdot \frac{FC}{DC} = 1, \frac{AB}{EB} \cdot \frac{EO}{MO} \cdot \frac{MC}{AC} = 1$$

所以
$$\frac{OF}{OM} = \frac{DB}{MB} \cdot \frac{FC}{DC}, \frac{OE}{OM} = \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AC}{MC}$$

故
$$\frac{OF \cdot OE}{OM^2} = \frac{DB}{MB} \cdot \frac{FC}{DC} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AC}{MC}$$

由 $EF /\!/ AD$，则

$$\frac{DB}{MB} = \frac{AB}{EB}, \frac{FC}{DC} = \frac{MC}{AC}$$

从而
$$\frac{OF \cdot OE}{OM^2} = 1$$

则
$$OF \cdot OE = OM^2 = OP^2$$

即
$$\triangle OFP \backsim \triangle OPE$$

故
$$\angle OPF = \angle OEP$$

3. 对 $\triangle AEC$ 及截线 BFD 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

而
$$\frac{AB}{BE} = 2, \frac{CD}{DA} = \frac{3}{2}$$

则
$$\frac{FC}{EF} = \frac{AB}{BE} \cdot \frac{CD}{DA} = 3$$

从而
$$EF = \frac{1}{3} FC = \frac{1}{4} EC$$

由共边比例定理，有

$$S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 20, S_{\triangle EBF} = \frac{1}{4} S_{\triangle EBC} = 5, S_{\triangle ADB} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABC} = 16$$

从而
$$S_{AEFD} = S_{\triangle ADB} - S_{\triangle EBF} = 16 - 5 = 11$$

第 2 节　直线束截平行线分线段成比例定理

经过一点的若干直线称它为一组直线束.

定理　一组直线束截两条平行线，所得的对应线段成比例.

已知：如图 1.15，BE、HG、DF 为经过点 A 的三条直线，$BD /\!/ EF$，求证：

$\frac{BH}{EG}=\frac{HD}{GF}=\frac{BD}{EF}$.

证明　如图1.15,由 $BD/\!/EF$,可知$\triangle ABH\backsim\triangle AEG$,故$\frac{BH}{EG}=\frac{AH}{AG}$,同理可得$\frac{HD}{GF}=\frac{AH}{AG}$,于是

$$\frac{BH}{EG}=\frac{HD}{GF}=\frac{BH+HD}{EG+GF}=\frac{BD}{EF}$$

即

$$\frac{BH}{EG}=\frac{HD}{GF}=\frac{BD}{EF}$$

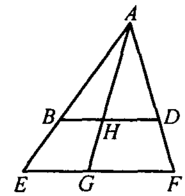


图1.15

特别地,当 H 为 BD 中点时,G 为 EF 的中点.于是有:

推论(直线束等分线段定理)　一组直线束在一条直线上截得相等的线段,在该直线的平行直线上也截得相等的线段.

现在介绍如上得到的定理及其推论在一些问题中的应用①.

例1　$\triangle ABC$ 中,D、E 分别为 AB、AC 上的一点,$DE/\!/BC$,BE 与 CD 交于 O,AO 分别交 BC、DE 于 M、N.求证:$BM=MC$,$DN=NE$.

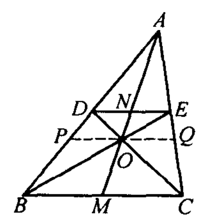


图1.16

证明　如图1.16,过 O 作 BC 的平行线分别交 AB、AC 于 P、Q,有 $DE/\!/PQ$.

由$\triangle DBC$与$\triangle EBC$面积相等,可知$\triangle BOD$与$\triangle COE$面积相等.于是可得 $OP=OQ$.故 $BM=MC$,$DN=NE$.

例2　已知:D 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点,E 为 AD 上一点,CE 交 AB 于 F,FD 与 BE 交于 G,过 G 作 BC 的平行线分别交 CF、AC 于 H、K.求证:$GH=HK$.

证明　如图1.17.设 GK 分别交 AB、AD 于 L、I.

由 $LK/\!/BC$,在$\triangle FBC$ 中,有

$$\frac{LG}{GH}=\frac{BD}{DC}$$

在$\triangle ABC$ 中,有

$$\frac{LI}{IK}=\frac{BD}{DC}$$

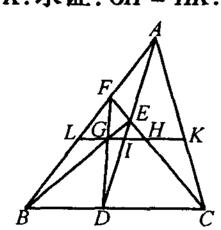


图1.17

在$\triangle EBC$ 中,有

$$\frac{GI}{IH}=\frac{BD}{DC}$$

① 潘供娟,田永海.直线束分线段成比例定理及应用[J].中学数学月刊,1999(10):29-31.

于是
$$\frac{LG}{GH}=\frac{LI}{IK}=\frac{GI}{IH}=\frac{LI-GI}{IK-IH}=\frac{LG}{HK}$$
即
$$\frac{LG}{GH}=\frac{LG}{HK}$$
故
$$GH=HK$$

例3 已知:如图1.18,设四边形 $DBCE$ 的对角线 BE 与 DC 交于 O,DB 与 CE 交于 A,直线 AO 分别交 BC、DE 于 M、N.求证:$\frac{AM}{AN}=\frac{OM}{ON}$.

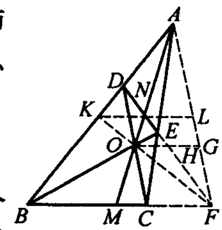


图1.18

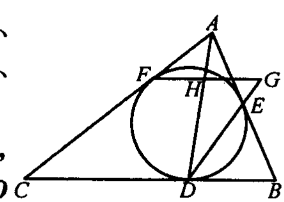
证明 若 $DE /\!/ BC$,则由例1,易证命题成立.

设 DE 与 BC 交于 F,联结 AF,过 O 作 BC 的平行线分别交 DE、AF 于 H、G.过 N 作 BC 的平行线分别交 FO、FA 于 K、L.

由例2,有 $OH=HG$.故 $KN=NL$.于是
$$\frac{AM}{AN}=\frac{MF}{NL}=\frac{MF}{KN}=\frac{OM}{ON}$$
即
$$\frac{AM}{AN}=\frac{OM}{ON}$$

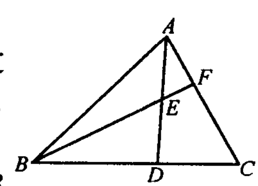
练　习　题

1.设△ABC 的三边分别与它的内切圆相切于 D、E、F,如图所示,过 F 作 BC 的平行线分别交直线 AD、DE 于 H、G.求证:$FH=HG$.



第1题

2.如图,在△ABC 的边 BC、AC 上分别取点 D、F,使得 $BD:DC=5:3$,AD 与 BF 交于点 E,使得 E 为 AD 的中点.求 $BE:EF$ 的值.



第2题

3.已知在梯形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$EF /\!/ AD$,联结 CE、BF 并延长交 AD 延长线于点 G、H,求证:$AG=DH$.

4.已知 C 为以 AB 为直径的半圆上的一点,分别过 A、B、C 作半圆的切线得交点 E、F.过 C 作 AB 的垂线,D 为垂足.求证:AF、BE、CD 三线共点.

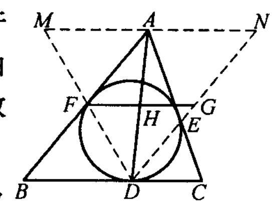
5.已知 AD 为圆 O 的直径,PD 为圆 O 的切线,PCB 为圆 O 的割线,PO 分别交 AB、AC 于 M、N.求证:$OM=ON$.

6.设$\triangle ABC$的边分别与$\angle A$内的旁切圆相切于D、E、F. OD与EF交于K.求证:AK平分BC.

7.设凸四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点为M,过点M作AD的平行线分别交AB、CD于点E、F,交BC的延长线于点O,P是以O为圆心,以OM为半径的圆上一点(在直线OB右侧).求证:$\angle OPE=\angle OEP$.

练习题解答

1.如图,过A作FG的平行线分别交直线DF、DG于M、N,则有$MN/\!/BC$.由$CD=CE$,可知$AN=AE$.由$BD=BF$,可知$AM=AF$.又$AF=AE$,得$AM=AN$.故$FH=HG$.



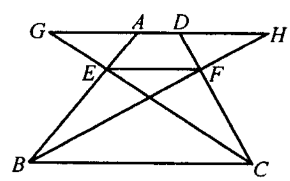
第1题

2.过D作$DG/\!/CA$,交BF于G,则$\frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}=\frac{5}{3}$,又由$DG/\!/AF$且$AE=ED$,知$\triangle AEF\cong\triangle DEG$,即$EF=GE$,则$\frac{BG}{GF}=\frac{BG}{2EF}=\frac{5}{3}$,即$\frac{BG}{EF}=\frac{10}{3}$,从而$\frac{BG+EF}{EF}=\frac{13}{3}$,故$\frac{BE}{EF}=\frac{13}{3}$.

3.如图,因$EF/\!/AD/\!/BC$,则

$$\frac{BE}{AB}=\frac{EF}{AH},\frac{CF}{CD}=\frac{EF}{DG}$$

且$\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{CD}$,则$\frac{EF}{AH}=\frac{EF}{DG}$,即$AH=DG$.又由$AG=DG-AD$,$DH=AH-AD$知$AG=DH$.

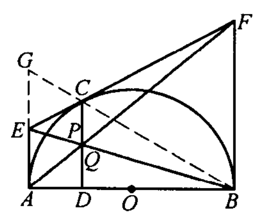


第3题

4.如图,设直线AE与BC交于G,CD与BE交于P.又设CD与AF交于Q.有$CD/\!/GA$.

由$FC=FB$,可知$EG=EC$.由$EA=EC$,可知$EA=EG$.则$PC=PD$,即P为CD中点.

同理可知,Q为CD中点,即P、Q重合.故AF、BE、CD三直线共点.



第4题

5.如图,过C作PM的平行线分别交AB、AD于E、F,过O作BP的垂线,G为垂足.联结GF、GD、GC,有$BG=GC$.

由$OG\perp BP$,$OD\perp DP$,可知O、G、D、P四点共圆.有$\angle GDO=\angle GPO=\angle GCF$.于是$F$、$G$、$D$、$C$四点共圆,故

$$\angle GFD = \angle GCD = \angle BCD = \angle BAD$$

即$\angle GFD = \angle BAD$,得 $AB /\!/ GF$.由 $BG = GC$,有 $EF = FC$.故 $OM = ON$.

6.如图,过 K 作 BC 的平行线分别交直线 AB、AC 于 N、M.联结 OM、ON、OE、OF.设 AK 与 BC 交点为 L.

显然,$OK \perp MN$,$OE \perp ME$.有 K、O、E、M 四点共圆,可知$\angle KMO = \angle KEO$.

同理有 F、N、O、K 四点共圆,可知$\angle KNO = \angle KFO$,由$\angle KEO = \angle KFO$,有$\angle KMO = \angle KNO$,则 $OM = ON$.

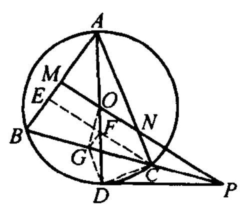
在$\triangle OMN$ 中,可知 $NK = KM$.故 $BL = LC$.即 AK 平分 BC.

7.如图,设 AD 与 BC 交于 G.在$\triangle CGA$ 中,可知$\frac{OF}{OM} = \frac{DG}{GA}$.在$\triangle BGA$ 中,可知$\frac{OM}{OE} = \frac{DG}{GA}$,于是$\frac{OF}{OM} = \frac{OM}{OE}$,或 $OM^2 = OE \cdot OF$,得

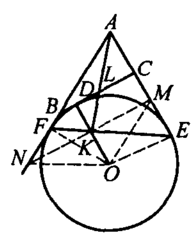
$$OP^2 = OE \cdot OF$$

则
$$\triangle OFP \backsim \triangle OPE$$

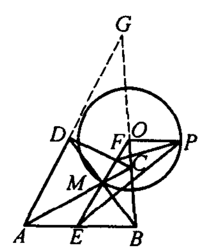
故
$$\angle OPF = \angle OEP$$



第 5 题



第 6 题



第 7 题

第 3 节 完全四边形的优美性质(一)[①]

我们把两两相交又没有三线共点的四条直线段及它们的六个交点所构成的图形,叫做完全四边形,六个点可分成三对相对的顶点,它们的连线是三条对角线.如图 1.19 所示,直线 ABC、BDE、CDF、AFE 两两相交于 A、B、C、D、E、F 六点,即为完全四边形 $ABCDEF$.线段 AD、BF、CE 为其三条对角线.

完全四边形中既含有凸四边形、凹四边形,还含有折四边形及一系列三角

① 沈文选.完全四边形的优美性质[J].中等数学,2006(8):17-22.

形图形，因而完全四边形有一系列优美的性质.前面的试题 A1，就是下面的性质 4 的一种特殊情形.

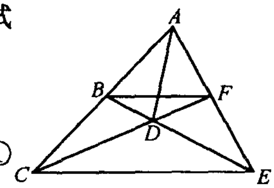


图 1.19

性质 1　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，有

$$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1 \quad ①$$

$$\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DC}=1 \quad ②$$

$$\frac{BA}{AC}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DE}{EB}=1 \quad ③$$

$$\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FA}{AE}=1 \quad ④$$

证明　仅证式①，其余各式可类似地证明，过 B 作 $BG/\!/CF$ 交 AF 于点 G，如图 1.20 所示，则

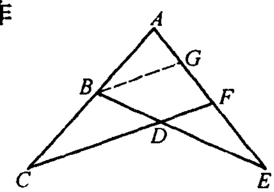


图 1.20

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AF}{FG},\frac{BD}{DE}=\frac{GF}{FE}$$

于是
$$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{AF}{FG}\cdot\frac{GF}{FE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

或者，由

$$\frac{AC}{CB}=\frac{S_{\triangle FAC}}{S_{\triangle FCB}},\frac{EF}{FA}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CFA}}$$

$$\frac{BD}{DE}=\frac{S_{\triangle FBD}}{S_{\triangle FDE}}=\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{S_{\triangle FBD}+S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle FDE}+S_{\triangle CDE}}=\frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle CEF}}$$

有
$$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{S_{\triangle FAC}}{S_{\triangle FBC}}\cdot\frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle CEF}}\cdot\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle FAC}}=1$$

注　若用有向线段表示，则上述各式右端的 1 均为 -1.

显然，上述式①，即为对△ABE 及截线 FDC 而得梅涅劳斯定理所呈结果；式②即为对△ACF 及截线 BDE 而得梅涅劳斯定理所呈结果；式③即为对△BCD 及截线 AFE 而得梅涅劳斯定理所呈结果；式④即为对△DEF 及截线 ABC 而得梅涅劳斯定理所呈结果.从而，在完全四边形中，梅涅劳斯定理获得了灵活呈现.

性质 2　在完全四边形 $ABCD$ 中，若对角线 AD 所在直线与对角线 CE 相交于点 G，则

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1 \quad ⑤$$

$$\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EG}{GC}=1 \quad ⑥$$

$$\frac{DG}{GA}\cdot\frac{AF}{FE}\cdot\frac{EB}{BD}=1 \quad ⑦$$

$$\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CB}{BA}=1 \quad ⑧$$

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FH}{HB}=1 \quad ⑨$$

证明 仅证式⑤,其余各式可类似地证明,对$\triangle ACG$及截线BDE应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CE}{EG}\cdot\frac{GD}{DA}=1$$

对$\triangle AGE$及截线CDF应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{GC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AD}{DG}=1$$

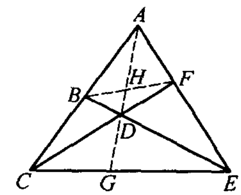


图 1.21

以上两式相乘,得

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

或者,由

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle DCE}}\cdot\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle DEA}}\cdot\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle DAC}}=1$$

即证.

显然,上述五式呈现出三角形中三线共点情形的塞瓦定理:对$\triangle ACE$及点D而得塞瓦定理即为式⑤,对$\triangle CDE$及点A而得塞瓦定理即为式⑥,对$\triangle ADE$及点C而得塞瓦定理即为式⑦,对$\triangle ACD$及点E而得塞瓦定理即为式⑧,对$\triangle ABF$及点D而得塞瓦定理即为式⑨.从而,在完全四边形中,塞瓦定理的共点形式获得了灵活呈现.

性质 3 在完全四边形$ABCDEF$中,对角线AD的延长线交对角线CE于点G.记

$$\frac{AD}{DG}=p_1,\frac{CD}{DF}=p_2,\frac{ED}{DB}=p_3,\frac{AB}{BC}=\lambda_3,\frac{EF}{FA}=\lambda_2,\frac{CG}{GE}=\lambda_1,$$

则

(1)
$$\lambda_1=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}=\frac{1+p_2}{1+p_3} \quad ⑩$$

$$\lambda_2=\frac{p_2p_3-1}{1+p_2}=\frac{1+p_2}{p_2p_1-1}=\frac{1+p_3}{1+p_1} \quad ⑪$$

$$\lambda_3=\frac{p_3p_1-1}{1+p_3}=\frac{1+p_3}{p_3p_2-1}=\frac{1+p_1}{1+p_2}$$ ⑫

$$p_1p_2p_3=p_1+p_2+p_3+2$$ ⑬

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$$ ⑭

(2)
$$p_1=\lambda_1\lambda_3+\lambda_3=\lambda_3+\frac{1}{\lambda_2}$$ ⑮

$$p_2=\lambda_2\lambda_1+\lambda_1=\lambda_1+\frac{1}{\lambda_3}$$ ⑯

$$p_3=\lambda_3\lambda_2+\lambda_2=\lambda_2+\frac{1}{\lambda_1}$$ ⑰

(3)
$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{ABDF}}=\frac{\lambda_2(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}{\lambda_3(1+2\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}$$ ⑱

证明　(1)过点 D 作 $MN /\!/ CE$ 交 BC 于 M，交 FE 于 N，则

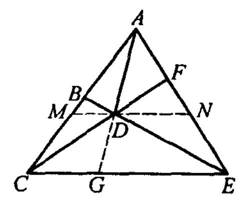


图 1.22

$$\frac{CE}{DN}=\frac{CF}{DF}=\frac{CD+DF}{DF}=p_2+1$$

$$\frac{GE}{DN}=\frac{AG}{AD}=\frac{AD+DG}{AD}=1+\frac{1}{p_1}$$

由上述两式相除，得

$$\frac{CE}{GE}=\frac{p_1(1+p_2)}{1+p_1}$$

从而
$$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{CE-GE}{GE}=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}$$

又由
$$\frac{CE}{MD}=\frac{BE}{BD}=\frac{BD+DE}{BD}=1+p_3$$

及
$$\frac{CG}{MD}=\frac{AG}{AD}=\frac{GE}{DN}=\frac{1+p_1}{p_1}$$

有
$$\frac{CE}{CG}=\frac{p_1(1+p_3)}{1+p_1}$$

从而
$$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}$$

对 $\triangle CED$ 及点 A 应用塞瓦定理或应用式⑥，有

$$\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}=1$$

从而
$$\lambda_1=\frac{CG}{GE}=\frac{CF}{DF}\cdot\frac{BD}{BE}=\frac{1+p_2}{1+p_3}$$

故 $$\lambda_1=\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}=\frac{1+p_2}{1+p_3}$$

同理,可证得式⑪、⑫.

由 $$\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}$$

有 $$(1+p_1)^2=(p_1p_2-1)(p_1p_3-1)$$

亦有 $$p_1p_2p_3=p_1+p_2+p_3+2$$

同样由 $$\frac{p_1p_2-1}{1+p_1}=\frac{1+p_2}{1+p_3}\text{或}\frac{1+p_1}{p_1p_3-1}=\frac{1+p_2}{1+p_3}$$

亦有 $$p_1p_2p_3=p_1+p_2+p_3+2$$

由 λ_2、λ_3 两式中的各式均可得到

$$p_1p_2p_3=p_1+p_2+p_3+2$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$$

可由塞瓦定理,或可由⑩、⑪、⑫各式来推证.

(2)由

$$p_1p_2p_3=p_1+p_2+p_3+2$$

有 $$p_1p_2p_3-p_2-p_3-2=p_1$$

上式两边同加上 $p_1p_2p_3+p_1p_2+p_1p_3$ 整理,即得

$$p_1=\lambda_3+\frac{1}{\lambda_2}$$

或者,对△ACG 及截线 BDE 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CE}{EG}\cdot\frac{GD}{DA}=1$$

从而 $$p_1=\lambda_1\lambda_3+\lambda_3=\lambda_3+\frac{1}{\lambda_2}$$

同理,可证得式⑯、⑰.

(3)由

$$\frac{CD}{DF}=p_2=\lambda_1+\frac{1}{\lambda_3}=\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_3}=\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2\lambda_3}$$

有 $$\frac{CD}{CG}=\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}$$

又 $$\frac{FD}{DC}=\frac{\lambda_2\lambda_3}{1+\lambda_2}$$

所以 $$\frac{FD}{FC}=\frac{\lambda_2\lambda_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}$$

易知
$$\frac{EF}{EA}=\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2},\frac{AB}{AC}=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}$$

于是
$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle CEF}}\cdot\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{FD}{FC}\cdot\frac{EF}{EA}=\frac{\lambda_2\lambda_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}=$$
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{AB}{AC}=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}$$

所以
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}-\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}-\frac{\lambda_2\lambda_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}=$$
$$\frac{\lambda_3(1+\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)-\lambda_2\lambda_2\lambda_3(1+\lambda_3)}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}=$$
$$\frac{\lambda_3(1+2\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}$$

而
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}-\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{S_{ABDF}}{S_{\triangle ACE}}$$

故
$$\frac{S_{ABDF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{\lambda_3(1+2\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}$$

又
$$\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle CEF}}\cdot\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{CD}{CF}\cdot\frac{EF}{DA}=$$
$$\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\cdot\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}=\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}$$

由上述两式相除,得
$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{ABCD}}=\frac{\lambda_2(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}{\lambda_3(1+2\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}$$

性质4　完全四边形的一条对角线所在直线与其他两条对角线所在直线相交,则被其他两条对角线所在直线调和分割.

如图1.23,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,若对角线 AD 所在直线分别与对角线 BF、CE 所在直线交于点 M、N,则
$$AM\cdot ND=AN\cdot MD \tag{19}$$

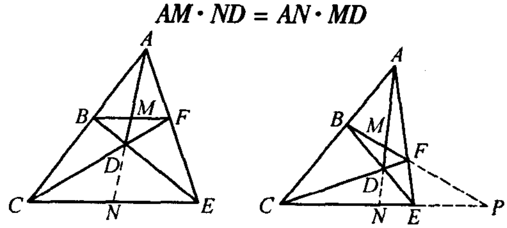


图1.23

若 $BF /\!/ CE$,则由$\frac{AM}{AN}=\frac{BF}{CE}=\frac{MD}{ND}$,即证.(此时,也可看做直线 BF、CE 相交于无穷远点 P,也有下面的⑳、㉑两式)

若 $BF \not\parallel CE$ 时,可设两直线相交于点 P,此时,还有

$$\frac{BM}{BP}=\frac{MF}{PF} \quad ⑳$$

$$\frac{CN}{CP}=\frac{NE}{PE} \quad ㉑$$

下面仅证明当 $BF \not\parallel CE$ 时,有$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$,其余两式可类似证明.

证法 1 对△ADF 及点 B 应用塞瓦定理,有

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1 \quad ㉒$$

对△ADF 及截线 CNE 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AN}{ND}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1 \quad ㉓$$

上述两式相除(即㉒÷㉓),可得$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

证法 2 对△ACD 及点 E,应用塞瓦定理,有

$$\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AN}{ND}\cdot\frac{DF}{FC}=1 \quad ㉔$$

对△ACD 及截线 BMF 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AB}{BC}=1 \quad ㉕$$

上述两式相乘(即㉔×㉕)可得$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

证法 3 对△ACD 及截线 BMF 应用梅涅劳斯定理,有式㉕,对△ADF 及截线 CNE 应用梅涅劳斯定理,有式㉓,对△ACF 及截线 BDE 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FE}{EA}=1 \quad ㉖$$

由㉓×㉕÷㉖得$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$.

注 对称性地考虑还有下述证法.

(1) 对△ABD 及点 F 和截线 CNE 分别应用塞瓦定理及梅涅劳斯定理亦证.

(2) 对$\triangle ADE$及点C和截线BMF分别应用塞瓦定理及梅涅劳斯定理亦证.

(3) 对$\triangle ADE$及截线BMF、对$\triangle ABD$及截线CNE、对$\triangle ABE$及截线CDF分别应用梅涅劳斯定理亦证.

证法 4　令$\angle CAN=\alpha,\angle NAE=\beta,AB=b,AC=c,AM=m,AD=d,AN=n,AF=f,AE=e$.

以A为视点,分别对B、M、F,B、D、E,C、D、F,C、N、E应用张角公式,得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{m}=\frac{\sin\alpha}{f}+\frac{\sin\beta}{b},\quad\frac{\sin(\alpha+\beta)}{d}=\frac{\sin\alpha}{e}+\frac{\sin\beta}{b}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{d}=\frac{\sin\alpha}{f}+\frac{\sin\beta}{c},\quad\frac{\sin(\alpha+\beta)}{n}=\frac{\sin\alpha}{e}+\frac{\sin\beta}{c}$$

上述第一式与第四式相加后减去其余两式,得

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{d}\sin(\alpha+\beta)$$

即

$$\frac{d}{m}+\frac{d}{n}=2 \tag{$*$}$$

亦即

$$\frac{AD}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AM}{AM}+\frac{AN}{AN}$$

亦即

$$\frac{AD-AM}{AM}=\frac{AN-AD}{AN}$$

故

$$\frac{AM}{AN}=\frac{MD}{ND}$$

注　式($*$)体现了调和分割的实际意义.

性质 5　完全四边形$ABCDEF$的三条对角线AD、BF、CE的中点M、N、P三点共线.

证法 1　如图 1.24,分别取CD、BD、BC的中点Q、R、S,则知在$\triangle ACD$中,M、R、Q三点共线,在$\triangle BCF$中,S、R、N三点共线,在$\triangle BCE$中,S、Q、P三点共线,由平行线性质,有

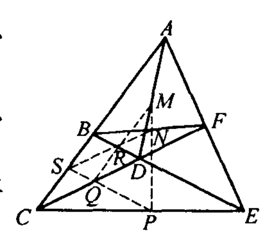


图 1.24

$$\frac{MQ}{MR}=\frac{AC}{AB},\frac{NR}{NS}=\frac{FD}{FC},\frac{PS}{PQ}=\frac{EB}{ED}$$

由于直线AFE是与$\triangle BCD$的边所在直线相截,所以上述三式右边的乘积

由梅涅劳斯定理知为 1,从而上述三式左边的乘积也为 1.

再对$\triangle QRS$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 N、M、P 三点共线.

证法 2 注意到平行四边形的一条性质:若过平行线对角线上一点作两边的平行线,则不含这条对角线的线段的两个小平行四边形的面积相等.反过来也成立.

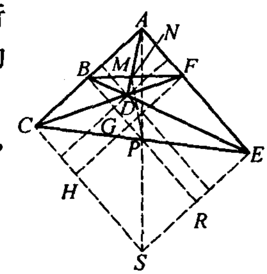


图 1.25

如图 1.25,作直线平行于完全四边形的边 AC、AE,并标以字母如图所示.由平行四边形的上述性质,知

$$S_{\square AD}=S_{\square DR},S_{\square AD}=S_{\square DH}$$

从而

$$S_{\square DR}=S_{\square DH}$$

于是,点 G 在对角线 DS 上.从而,AD、AG 和 AS 的中点共线.

又由于 AS 与 CE 互相平分,AG 与 CF 也互相平分,所以,AD、BF、CE 的中点 M、N、P 三点共线.

下面给出几道应用的例子.①

例 1 (第 1 节试题 A1)四边形 $ABCD$ 的两组对边延长后得交点 E、F,对角线 $BD/\!/EF$,AC 的延长线交 EF 于 G.求证:$EG=GF$.

证法 1 如图 1.1,令

$$\frac{AC}{CG}=P_1,\frac{EC}{CD}=P_2,\frac{FC}{CB}=P_3$$

由性质 3(1),知

$$\frac{AB}{BE}=\lambda_3=\frac{1+P_1}{1+P_2},\frac{AD}{DF}=\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1+P_1}{1+P_3},\frac{EG}{GF}=\lambda_1=\frac{1+P_2}{1+P_3}$$

因为 $BD/\!/EF$,有$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$,亦即 $1+P_2=1+P_3$.从而

$$\frac{EG}{GF}=\frac{1+P_2}{1+P_3}=1$$

故

$$EG=GF$$

证法 2 由于 $BD/\!/EF$,按射影几何观点,可设直线 BD、EF 相交于无穷远点 P,则由性质 4,知对角线 EF 所在直线被调和分割,即$\frac{EG}{EP}=\frac{GF}{PF}$.而由射影几

① 沈文选.完全四边形的一条性质及应用[J].中学数学,2006(1):44-45.

何知识有 $EP=PF$，故 $EG=GF$.

例 2　设凸四边形的两组对边所在直线分别交于 E、F 两点，两对角线的交点为 P，过 P 作 $PO\perp EF$ 于 O. 求证：$\angle BOC=\angle AOD$.

（2002 年国家队选拔赛题）

分析　如图 1.26，只须证 $\angle POC=\angle POA$ 及 $\angle POB=\angle POD$.

证法 1　先证 $\angle POC=\angle POA$.

若 $AC \not\parallel EF$，设 AC 的延长线交 EF 于点 Q，过 P 作 EF 的平行线分别交直线 OA、OC 于 I、J，则

$$\frac{PI}{QO}=\frac{AP}{AQ},\frac{PJ}{QO}=\frac{PC}{QC}$$

欲证 $PI=PJ$，只须证

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC} \qquad (*)$$

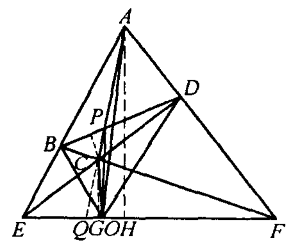


图 1.26

对完全四边形 $ABECFD$ 应用其对角线调和分割性质，知式（*）成立. 故

$$\angle POC=\angle POA$$

若 $AC\parallel EF$，如图 1.27，过 A 作 $AK\parallel EC$ 交 BD 于 K，则 $\frac{DK}{KP}=\frac{DA}{AE}=\frac{DC}{CF}$，从而 $KC\parallel AF$，即 $ABCK$ 是平行四边形，故 P 为 AC 的中点，于是

$$\angle POC=\angle POA$$

同理可证 $\angle POB=\angle POD$

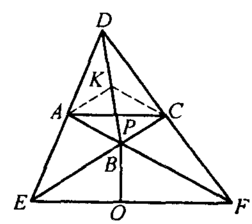


图 1.27

证法 2　若 $AC \not\parallel EF$，设 AC 的延长线交 EF 于 Q. 欲证 $\angle POC=\angle POA$，只须证 $\angle COE=\angle AOF$. 作 $CG\perp EF$ 于 G，作 $AH\perp EF$ 于 H，如图 1.26 所示. 又只须证 $\mathrm{Rt}\triangle CGO\backsim\mathrm{Rt}\triangle AHO$，只须证 $\frac{CG}{AH}=\frac{GO}{OH}$.

由 $CG\parallel PO\parallel AH$，知

$$\frac{GO}{OH}=\frac{PC}{PA},\frac{CG}{AH}=\frac{QC}{QA}$$

从而又只须证

$$\frac{PC}{PA}=\frac{QC}{QA}$$

即

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}$$

对完全四边形 $ABECFD$ 应用其对角线调和分割性质,知上式成立.故

$$\angle POC=\angle POA$$

同证法1可证 $AC/\!/EF$ 时情形.同理可证

$$\angle POB=\angle POD$$

例2 如图1.28,设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的高线 CP 上的任一点,直线 AH、BH 分别交 BC、AC 于点 M、N,MN 与 CP 交点 O,过 O 的直线交 CM 于 D,交 NH 于点 E.求证:$\angle EPC=\angle DPC$.

(2003年保加利亚奥林匹克试题)

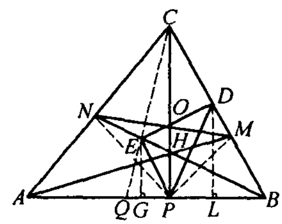


图1.28

证法1 如图1.28,连 CE 并延长交 AB 于 Q,作 $DL\perp AB$ 于 L,作 $EG\perp AB$ 于 G.

由 $EG/\!/CP/\!/DL$,有$\dfrac{PG}{PL}=\dfrac{EO}{OD}$,及

$$\frac{EG}{DL}=\frac{EG}{PC}\cdot\frac{PC}{DL}=\frac{QE}{QC}\cdot\frac{BC}{BD}$$

欲证$\angle EPC=\angle DPC$,只须证$\angle EPG=\angle DPL$,又只须证 $\mathrm{Rt}\triangle EPG\backsim\mathrm{Rt}\triangle DPL$,即只须证$\dfrac{PG}{PL}=\dfrac{EG}{DL}$,又只须证

$$\frac{EO}{OD}=\frac{QE}{QC}\cdot\frac{BC}{BD}$$

即只须证

$$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OE}=1$$

对$\triangle CEH$ 及截线 QPB、对$\triangle COD$ 及截线 EHB、对$\triangle OEH$ 及截线 CDB 分别应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{EB}{BH}\cdot\frac{HP}{PC}=1,\frac{CH}{HO}\cdot\frac{OE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}=1,\frac{OC}{CH}\cdot\frac{HB}{BE}\cdot\frac{ED}{DO}=1$$

即

$$\frac{QE}{CQ}=\frac{EB}{BH}\cdot\frac{HP}{PC},\frac{BC}{BD}=\frac{CH}{HO}\cdot\frac{OE}{ED},\frac{OD}{OC}=\frac{BH}{HC}\cdot\frac{DE}{EB}$$

以上三式相乘,得

$$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OC}=\frac{HP}{PC}\cdot\frac{OE}{HO}$$

即

$$\frac{QE}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{OD}{OE}=\frac{PH}{PC}\cdot\frac{OC}{HO}$$

因此,只须证$\dfrac{OC}{OH}=\dfrac{PC}{PH}$.而此式由完全四边形 $CNAHBM$ 应用其对角线调和分割性质即证.故$\angle EPC=\angle DPC$.

证法2　如图1.28,联结 PM、PN,则由三角形高上一点的性质知$\angle MPC=\angle NPC$,并令其大小为 φ,再令$\angle EPC=x$,$\angle DPC=y$.

欲证 $x=y$,只须证明

$$\cot x=\cot y\Leftrightarrow\cos x\sin y=\sin x\cos y\Leftrightarrow$$
$$\sin\varphi\cos x\sin y=\sin\varphi\sin x\cos y\Leftrightarrow$$
$$\sin\varphi\cos x\sin y-\cos\varphi\sin x\sin y=$$
$$\sin\varphi\sin x\cos y-\cos\varphi\sin x\sin y\Leftrightarrow$$
$$\frac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\frac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}$$

由
$$\frac{NE}{EH}=\frac{S_{\triangle NEP}}{S_{\triangle EHP}}=\frac{NP\sin(\varphi-x)}{PH\sin x}$$

有
$$\frac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\frac{NE}{EH}\cdot\frac{PH}{NP}$$

同理
$$\frac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}=\frac{DM}{CD}\cdot\frac{CP}{PM}$$

注意到$\frac{PM}{PN}=\frac{MO}{NO}$,只须证

$$\frac{NE}{EH}\cdot\frac{CD}{DM}\cdot\frac{PH}{CP}\cdot\frac{MO}{NO}=1$$

设$\angle MOD=\delta$,$\angle EOP=\psi$,又因

$$\frac{NE}{EH}=\frac{S_{\triangle NEO}}{S_{\triangle EHO}}=\frac{NO\sin\delta}{OH\sin\psi},\frac{CD}{DM}=\frac{S_{\triangle CDO}}{S_{\triangle DMO}}=\frac{CO\sin\psi}{OM\sin\delta}$$

于是,又只须证

$$\frac{OC}{OH}\cdot\frac{PH}{PC}=1$$

即
$$\frac{OC}{OH}=\frac{PC}{PH}$$

而此式,由完全四边形 $CNAHBM$ 应用其对角线调和分割性质即证.故$\angle EPC=\angle DPC$.

练　习　题

1.在$\triangle ABC$中,D 在 AB 上,且使 $AD:DB=1:2$,而 G 在 CD 上且使 $CG:GD=3:2$.如果 BG 交 AC 于 F,求 $BG:GF$ 的值.

2.在$\triangle ABC$中,D、E 分别在 AB、AC 上,且 $BD=CE$,联结 DE 并延长与 BC

的延长线交于 F.求证:$AC\cdot EF=AB\cdot DF$.

3.在$\triangle ABC$的中线AD上任取一点P,射线BP、CP分别交AC、AB于F、E.求证:$EF/\!/BC$.

4.四边形$AKLC$的两组对边KA、LC的延长线交于点D,AC、KL的延长线交于点G,B为四边形对角线的交点,BD的延长线交KL于点F.求证:$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{LG}$.

练习题解答

1.由性质3(2)中式⑰,有

$$\frac{CG}{GD}=\frac{CF}{FA}\left(1+\frac{AD}{DB}\right)$$

而
$$\frac{CG}{GD}=\frac{3}{2},\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$$

从而$\frac{CF}{FA}=1$,又由性质3(2)中式⑯,有

$$\frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DA}\left(1+\frac{AF}{FC}\right)$$

而$\frac{BD}{DA}=\frac{2}{1}$,从而

$$\frac{BG}{GF}=2\left(1+\frac{AF}{FC}\right)$$

故$\frac{BG}{GF}=4$.

2.由性质3(2)中式⑰,有

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\left(1+\frac{BC}{CF}\right)$$

注意到$EC=DB$,有

$$\frac{CF}{CB}=\frac{AD}{AE-AD}$$

又由性质3(2)中式⑯,有

$$\frac{FE}{ED}=\frac{FC}{CB}\left(1+\frac{BD}{DA}\right)$$

亦即有
$$\frac{FE}{ED}=\frac{AD}{AE-AD}\left(\frac{AD+CE}{AD}\right)$$

即
$$\frac{ED}{FE}=\frac{AD-AE}{DA+CE},\frac{DF}{EF}=\frac{AC}{AB}$$
故
$$AC\cdot EF=AB\cdot DF$$

3. 由性质3(2)中式⑮,有
$$\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EB}\left(1+\frac{BD}{DC}\right),\frac{AP}{PD}=\frac{AF}{FC}\left(1+\frac{DC}{BC}\right)$$
注意到 $BD=DC$ 有
$$\frac{AP}{PD}=\frac{2AE}{EB},\frac{AP}{PD}=\frac{2AF}{FC}$$
即有$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$,故 $EF/\!/BC$.

4. 由性质3(2)中⑰、⑯两式及梅涅劳斯定理,有
$$\frac{KB}{BC}=\frac{KF}{FL}\left(1+\frac{LC}{CD}\right),\frac{KB}{BC}=\frac{KA}{AD}\left(1+\frac{DC}{LC}\right)$$
亦即有
$$\frac{KF}{FL}=\left(1+\frac{LC}{CD}\right)=\frac{KA}{AD}\left(1+\frac{DC}{CL}\right)$$
而
$$\frac{KF}{FL}=\frac{KA\cdot CD}{AD\cdot LC}$$
又
$$\frac{DA}{AK}\cdot\frac{KG}{GL}\cdot\frac{LC}{CD}=1$$
则
$$\frac{KG}{GL}=\frac{KA\cdot CD}{AD\cdot LC}$$
故
$$\frac{FK}{FL}=\frac{KG}{GL}$$
或者直接由性质4即知有$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$.

第4节 凸四边形中的截割线问题

用直线去截凸四边形,可得有关凸四边形的一系列有趣的结论.

定理1 如图1.29,在凸四边形 $ABCD$ 中,G 是 CD 上任一点,且$\frac{DG}{GC}=\lambda$,则 $S_{\triangle ABG}=\frac{S_{\triangle ABD}+\lambda S_{\triangle ABC}}{1+\lambda}$.

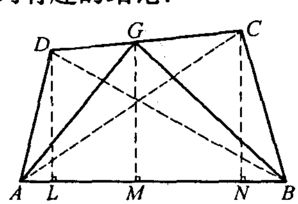


图1.29

证法1 设 L、M、N 分别为 D、G、C 在直线 AB 上的射影(垂线的垂足),则在梯形 $LNCD$ 中,由第1节中定理,知 $GM=\frac{DL+\lambda CN}{1+\lambda}$,此式两边乘以$\frac{1}{2}AB$,即可

得到结论.

证法 2 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S,则

$$S_{\triangle ABG}=S-S_{\triangle ADG}-S_{\triangle BCG}$$

联结 BD、AC,则

$$S_{\triangle ADG}=\frac{\lambda}{1+\lambda}(S-S_{\triangle ABC}),S_{\triangle BCG}=\frac{1}{1+\lambda}(S-S_{\triangle ABD})$$

从而

$$S_{\triangle ABG}=S-\frac{\lambda}{1+\lambda}(S-S_{\triangle ABC})-\frac{1}{1+\lambda}(S-S_{\triangle ABD})=$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{1+\lambda}S_{\triangle ABD}=\frac{S_{\triangle ABD}+\lambda S_{\triangle ABC}}{1+\lambda}$$

定理 2 如图 1.30,$ABCD$ 为凸四边形,在 AB、BC、CD、DA 边上顺次取 E、F、G、H,使 $AE:EB=DG:GC=\lambda$,$AH:HD=BF:FC=\mu$,EG 与 FH 交于点 K,则 $HK:KF=\lambda$,$EK:KG=\mu$.

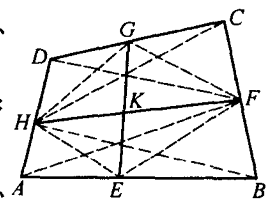


图 1.30

证法 1[①] 如图 1.30,联结 HG、HC、DF、GF、HE、HB、AF、EF,则

$$S_{\triangle HFA}=\frac{AH}{HD}S_{\triangle HFD}=\mu S_{\triangle HFD},S_{\triangle HFB}=\frac{BF}{FC}S_{\triangle HFC}=\mu S_{\triangle HFC}$$

由本节定理 1,知

$$S_{\triangle GHF}=\frac{S_{\triangle HFD}+\lambda S_{\triangle HFC}}{1+\lambda}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{S_{\triangle HFA}+\lambda S_{\triangle HFB}}{1+\lambda}\right)=\frac{1}{\mu}S_{\triangle EHF}$$

而 $\frac{S_{\triangle EHF}}{S_{\triangle GHF}}=\frac{EK}{KG}$,从而 $\frac{EK}{KG}=\mu$,同理 $\frac{HK}{KF}=\lambda$.

证法 2[②] 如图 1.31,以 D 为原点,DA 为 x 轴(正向)建立坐标系.设点 A、B、C 坐标分别为 $(a,0)$、(b,c)、(d,e).则 E、F、G、H 坐标为

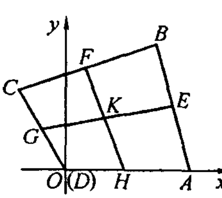


图 1.31

$$x_E=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda},y_E=\frac{\lambda c}{1+\lambda}$$

$$x_F=\frac{b+\mu d}{1+\mu},y_F=\frac{c+\mu e}{1+\mu}$$

① 张景中,曹培生.从数学教育到教育数学[M].北京:中国少年儿童出版社,2005:71.
② 杨世明.一般截割定理[J].中学数学,1992(6):22-23.

$$x_G=\frac{\lambda d}{1+\lambda},y_G=\frac{\lambda e}{1+\lambda}$$

$$x_H=\frac{q}{1+\mu},y_H=0$$

设 EG 的 μ 分点 $K_1(x_1,y_1)$,则

$$x_1=\frac{x_E+\mu x_G}{1+\mu}=\frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)}(a+\lambda b+\mu\lambda d)$$

$$y_1=\frac{y_E+\mu y_G}{1+\mu}=\frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)}(\lambda c+\mu\lambda e)$$

设 HF 的 λ 分点为 $K_2(x_2,y_2)$,则

$$x_2=\frac{x_H+\lambda x_F}{1+\lambda}=\frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)}(a+\lambda(b+\mu d))$$

$$y_2=\frac{y_H+\lambda y_F}{1+\lambda}=\frac{1}{(1+\lambda)(1+\mu)}(0+\lambda(c+\mu e))$$

易见 $x_1=x_2,y_1=y_2$,即 K_1 与 K_2 重合为 K,说明

$$HK:KF=\lambda,EK:KG=\mu$$

定理 3　在凸四边形 $ABCD$ 中,E、G 分别是 AB、CD 的中点,则 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABG}+S_{\triangle CDE}$.

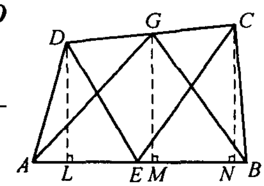


图 1.32

证明　分别作 $DL\perp AB$ 于 L,$GM\perp AB$ 于 M,$CN\perp AB$ 于 N,设 $DL=h_1$,$CN=h_2$,$GM=h$,$AE=EB=a$.

则在梯形 $NCDL$ 中,有 $h_1+h_2=2h$.此时

$$S_{\triangle AED}+S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)=ah$$

又因为
$$S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}AB\cdot GM=ah$$

从而
$$S_{ABCD}=(S_{\triangle AED}+S_{\triangle EBC})+S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ABG}+S_{\triangle CDE}$$

注　此定理即为任意凸四边形的面积等于一组对边中点分别与对边端点连线和对边组成的两个三角形的面积之和.

定理 4　在凸四边形 $ABCD$ 中,A_1、A_2 是边 AB 上的顺次的三等分点,C_1、C_2 是边 CD 上顺次的三等分点,如图 1.33 所示,则 $S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

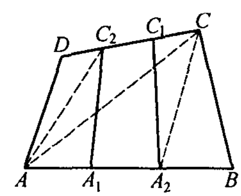


图 1.33

证明[①]　因 A_1、A_2、C_1、C_2 均为三等分点,联结 AC、AC_2、A_2C,则

① 单墫.平面几何中的小花[M].上海:上海教育出版社,2002:78.

$$S_{\triangle BCA_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCA},S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}$$

从而
$$S_{\triangle BCA_2}+S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}(S_{\triangle BCA}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{3}S_{ABCD}$$

而
$$S_{\triangle A_2C_2A_1}=S_{\triangle A_1C_2A},S_{\triangle C_2A_2C_1}=S_{\triangle C_1A_2C}$$

所以
$$S_{A_1A_2C_1C_2}=S_{\triangle A_2C_2A_1}+S_{\triangle C_2A_2C_1}=\frac{1}{2}S_{AC_2C_1B}=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)S_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$$

推论 在凸四边形 $ABCD$ 中,$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$是边 AB 上顺次的 n 等分点,$C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$是边 DC 上顺次的 n 等分点,且记

$$A=A_0,B=A_n,D=C_0,C=C_n$$
$$S_{A_0A_1C_1C_0}=S_1,\cdots,S_{A_{i-1}A_iC_iC_{i-1}}=S_i,i=1,2,\cdots,n$$

则
$$S_i=\frac{1}{2}(S_{i-1}+S_{i+1}),i=1,2,\cdots,n-1$$

事实上,由定理 4,知

$$S_i=\frac{1}{3}(S_{i-1}+S_i+S_{i+1}),i=2,3,\cdots,n-1$$

即可推得结论成立.

定理 5 在凸四边形 $ABCD$ 中,A_1、A_2 是边 AB 上顺次的三等分点,B_1、B_2 是边 BC 上顺次的三等分点,C_1、C_2 是边 CD 上顺次的三等分点,D_1、D_2 是边 DA 上顺次的三等分点,A_2C_1 与 B_1D_2、B_2D_1 分别交于点 M、N,A_1C_2 与 B_2D_1、B_1D_2 分别交于点 K、L,则 $S_{MNKL}=\frac{1}{9}S_{ABCD}$.

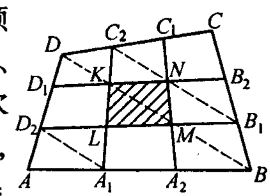


图 1.34

证明 如图 1.34,联结 A_1D_2、BD、B_1C_2,则 $A_1D_2/\!/BD/\!/B_1C_2$,即有

$$\frac{A_1L}{LC_2}=\frac{A_1D_2}{B_1C_2}=\frac{A_1D_2}{BD}\cdot\frac{BD}{B_1C_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

即$\frac{A_1L}{A_1C_2}=\frac{1}{3}$.

同理(可以用 $A_2B_1/\!/AC/\!/D_1C_2$),有

$$\frac{KC_2}{A_1C_2}=\frac{1}{3},\frac{A_2M}{A_2C_1}=\frac{NC_1}{A_2C_1}=\frac{1}{3}$$

从而 L、K 为 A_1C_2 的三等分点,M、N 为 A_2C_1 的三等分点.由定理 4 知

$$S_{LMNK}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{1}{9}S_{ABCD}$$

注　将图 1.34 中的 9 个小四边形(由左而右,由上而下)的面积分别记为 S_{11}、S_{12}、S_{13}、S_{21}、S_{22}、S_{23}、S_{31}、S_{32}、S_{33},则

$$S_{22}=\frac{1}{3}(S_{12}+S_{22}+S_{32})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S=\frac{1}{9}S$$

且这个面积数按图形中所对应的位置组成一个等差数阵

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

推论　在凸四边形 $ABCD$ 中,若将每边等分为 $2n+1$ 份,联结对边相应的分点,那么中间的一块是整个四边形的 $\frac{1}{(2n+1)^2}$.

注　若将凸四边形的每边 n 等分,联结对边相应的分点得 n^2 个小四边形,每个小四边形的面积记为 $S_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则这 n^2 个面积数按图形中所对应的位置组成一个等差数阵,即

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}$$

此情形还可推广到一组对边被 n 等分,另一组对边被 m 等分的情形.

定理 6　凸四边形的两条对角线把四边形划分成的四个小三角形中,两组对顶的两个三角形面积之积相等.

证明　如图 1.35,记 $\angle AOB=\alpha$,$\triangle AOB$、$\triangle COD$、$\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3 和 S_4,则由三角形面积公式,可知

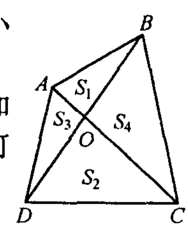


图 1.35

$$S_1\cdot S_2=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\alpha$$

$$S_3\cdot S_4=\frac{1}{2}AO\cdot DO\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\frac{1}{2}BO\cdot CO\sin(180^\circ-\alpha)$$

故得 $S_1S_2=S_3S_4$.

在图 1.35 中,若 $AB/\!/CD$,则 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$,可见 $S_3=S_4$,再据定理,有

$$S_3=S_4=\sqrt{S_1\cdot S_2}$$

从而梯形 $ABCD$ 的面积

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

由此,我们可以得到下列结论.

推论 1 梯形两腰和两对角线所在的两个三角形的面积相等,且等于梯形两底与两对角线所在的三角形面积之积的算术平方根,即

$$S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

推论 2 如果梯形的两底与两对角线所在的三角形的面积分别为 S_1 和 S_2,那么梯形的面积

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

推论 3 如图 1.35,有

$$S_1 + S_2 \geqslant S_3 + S_4$$

事实上,由 $S_1 + S_2 \geqslant 2\sqrt{S_1 S_2} = S_3 + S_4$ 即得

推广 1 四边形对角线上任一点与另两个顶点的连线将该四边形分成四

个三角形,对顶的两三角形面积之乘积相等.如图 1.36 中的

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

推广 2 三角形一顶点和对边上一点的连线上任一点与另两个顶点的连线将该三角形分成四个三角形,其对顶的两三角形面积的乘积相等.如图 1.27 中的

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

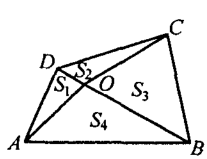


图 1.36

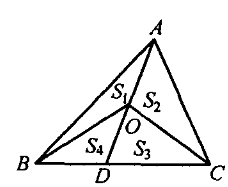


图 1.37

定理 7 在平行四边形中:

(1)平行四边形两条对角线将该平行四边形分成面积相等的四个三角形.

(2)平行四边形的边上任一点和对边两端点的连线将该平行四边形分成面积相等的两部分.即图 1.38 中的

$$S_3 = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

(3)平行四边形内任一点与四个顶点的连线将其分成四个三角形,则对顶的两三角形面积之和相等.即图 1.29 中的

$$S_1+S_2=S_3+S_4$$

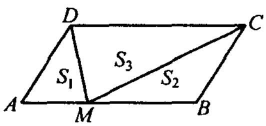


图 1.38

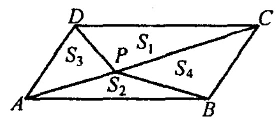


图 1.39

定理 8① 凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 K,如果有面积和式

$$S_{\triangle AKB}+S_{\triangle CKD}=S_{\triangle BKC}+S_{\triangle DKA} \qquad (*)$$

那么 K 是 AC 或 BD 的中点.

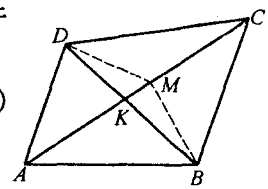


图 1.40

证明 若 K 不是 AC 的中点,设点 M 是 AC 的中点,如图 1.40 所示,易知

$$S_{\triangle CKD}-S_{\triangle DAK}=(S_{\triangle CMD}+S_{\triangle MDK})-(S_{\triangle DMA}-S_{\triangle MDK})=2S_{\triangle MDK}$$

同理

$$S_{\triangle BKC}-S_{\triangle AKB}=2S_{\triangle MBK}$$

将上述两式代入题设条件式,得

$$2S_{\triangle MDK}=2S_{\triangle MBK}$$

从而,知 K 是 BD 的中点.

反过来,当 K 为 AC 或 BD 的中点时,有题设条件式(*).可以证明满足式(*)的点 K 的轨迹就是过 AC、BD 中点的直线,称为牛顿线,这即为第 2 节中性质 5.(此时,当然需要约定面积是所谓的"有向面积",即当 A、K、B 三点成逆时针方向时,约 $S_{\triangle AKB}$ 为正;当 A、K、B 三点成顺时针方向时,约 $S_{\triangle AKB}$ 为负)

例 1 $ABCD$ 为任意四边形,E、F、G、H 分别为 AB 与 CD 的三等分点,而 M、N 分别为 AD、BC 的中点,求证:EG、FH 被 MN 平分,而且 MN 被 EG、FH 三等分.

证明 联结 MN、EG、FH,将 $ABCD$ 分成六个小四边形分别记为 1,2,3,4,5,6,如图 1.41 所示.

将 2,3,4 三个四边形移置如图 1.41 所示处,显然 $\angle AMP+\angle AMP_1=180°$,从而 P、M、P_1 共直线,同理 P、E、P_2 共直线,P_2、Q_1、H_1 共直线,H_1、G_1、P_1 共

① 单墫.平面几何中的小花[M].上海:上海教育出版社,2002:14-15.

直线.又从原图中可知$\angle Q_1P_2E=\angle G_1P_1M$,$\angle EPM=\angle Q_1H_1G_1$,因此,四边形$P_2PP_1H_1$为平行四边形,同时可知$E$、$M$、$Q_1$、$G_1$分别为其四边中点,故$MEQ_1G_1$也为平行四边形,从而$EQ_1=MG_1=EQ=MG$,$EM=Q_1G_1=QG$,即$MEQG$为平行四边形.故对角线$MQ$、$EG$互相平分,即$MQ$被$EG$平分.

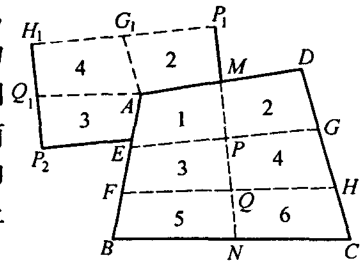


图 1.41

同理,可证得FH与PN互相平分,由此即得结论.

例2 如图1.42,已知平行四边形$ABCD$的面积为1(平方单位),E为边DC上一点,$DE:EC=3:2$,AE、BD交于点F.求$\triangle DEF$的面积S_1,$\triangle EFB$的面积S_2,$\triangle AFB$的面积S_3.

(1984年苏州市数学竞赛试题)

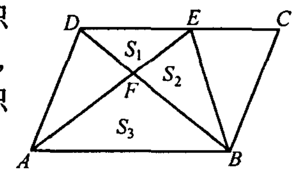


图 1.42

解 因为

$$S_2^2=S_1\cdot S_3 \quad ①$$

又

$$S_2+S_3=S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

即

$$S_2+S_3=\frac{1}{2} \quad ②$$

由

$$S_{\triangle BDE}:S_{\triangle BCE}=DE:EC=3:2$$

及

$$S_{\triangle BDE}+S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}$$

可求出$S_{\triangle BDE}=\frac{3}{10}$,即

$$S_1+S_2=\frac{3}{10} \quad ③$$

由①、②、③三式可求得

$$S_1=\frac{9}{80},S_2=\frac{3}{16},S_3=\frac{5}{16}$$

例3 有一凸五边形,其相邻的三个顶点所成的三角形的面积均为1,求这个五边形的面积.

(第1届USAMO试题)

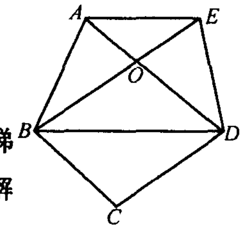


图1.43

解　如图1.43,设对角线 AD、BE 相交于 O.

由 $S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AED}=1$,知 $AE/\!/BD$.

同理,$AD/\!/BC$,$BE/\!/CD$.

由平行四边形 $BCDO$ 知,$S_{\triangle BOD}=1$.设 $S_{\triangle AEO}=S$,则梯形 $ABDE$ 的面积为 $3-S$.据推论2知,$(\sqrt{S}+1)^2=3-S$.解得 $\sqrt{S}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,从而梯形 $ABDE$ 的面积为

$$3-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

故五边形 $ABCDE$ 的面积为

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

练　习　题

1.已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G,且 $AG=3$,$BG=4$,$CG=5$,那么 $\triangle ABC$ 的面积为________.

2.已知边长为 a 的正方形 $ABCD$,E 为 AD 的中点,P 为 CE 的中点,F 为 BP 的中点,则 $\triangle BFD$ 的面积是(　　).

A.$\frac{1}{64}a^2$　　B.$\frac{1}{32}a^2$　　C.$\frac{1}{16}a^2$　　D.$\frac{1}{8}a^2$

3.设 X 为四边形 $PQRS$ 的边 QR 上任意点,过 Q 作平行 PX 的直线与过 R 作平行 SX 的直线交于 Y.若 S_A 是 $\triangle PSY$ 的面积,S_B 为 $PQRS$ 的面积,则(　　).

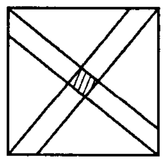
A. $S_A=S_B$　B. $S_A<S_B$　C. $S_A>S_B$　D. $S_A=2S_B$　E.以上皆非

4.设四边形 $A_{00}A_{m0}A_{mn}A_{0n}$ 的一组对边 $A_{00}A_{0n}$ 和 $A_{m0}A_{mn}$ 顺次被点 $A_{01},\cdots,A_{0n-1}$ 和 $A_{m1},\cdots,A_{mn-1}$ n 等分,另一组对边 $A_{00}A_{m0}$ 和 $A_{0n}A_{mn}$ 依次被点 $A_{10},\cdots,A_{m-10}$ 和 $A_{1n},\cdots,A_{m-1n}$ m 等分,联结 $A_{0j}A_{mj}$ 和 $A_{i0}A_{in}$,$i=1,\cdots,m-1$,$j=1,\cdots,n-1$,则这些线段中的每一条都被两组线段间的交点等分.

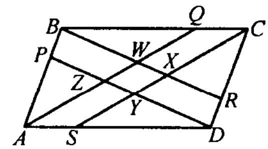
5.如图,把单位正方形的每边分为 n 等份,再联结每个顶点与相对顶点最近的分点,这样在正方形的内部作出了一个小正方形(图中用阴影表示)的面积恰好是 $\frac{1}{1\,985}$,求 n 的值.

6.如图,面积为740的平行四边形 $ABCD$,边 AB、BC、CD、DA 上 $5:2$ 的内

分点分别为 P、Q、R、S. 直线 AQ 与 BR 交于 W,直线 BR 与 CS 交于 X,直线 CS 与 DP 交于 Y,直线 DP 与 AQ 交于 Z,求四边形 $WXYZ$ 的面积.



第 5 题



第 6 题

7. 给定一个凸四边形,是否总能在它的内部确定一点,使得该点与各边中点的连线将四边形分为四个面积相等的区域? 如果这样的点存在,那么是否是唯一的?

8. 把平行四边形内部一点与四个顶点连起来,就得到四个三角形,试找出一点,它所决定的四个三角形的面积可以排成等比数列,并证明这样的点是唯一的.

9. 设 $ABCD$ 是凸四边形,考察两个新的凸四边形 F_1 和 F_2,它们的两个相对顶点都分别是 $ABCD$ 的对角线的中点,而另两个顶点又都分别是 $ABCD$ 对边的中点. 已知 F_1 和 F_2 的面积相等. 求证:$ABCD$ 的一条对角线将它分成等面积的两部分.

10. 凸四边形 $ABCD$ 的面积为 S,O 为四边形内部一点,K、L、M 与 N 分别是边 AB、BC、CD 与 DA 内部的点. 如果四边形 $OKBL$ 及 $OMDN$ 都是平行四边形,求证:$\sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$,其中 S_1 与 S_2 分别是 $ONAK$ 与 $OLCM$ 的面积.

练习题解答

1. 如图,延长 BG 到 G',使 $BG = GG'$,易知四边形 $AGCG'$ 为平行四边形. 由 $AG = 3$, $GG' = 4$, $AG' = 5$,知 $\angle AGG' = 90°$,即 $S_{\triangle AGG'} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,故 $S_{\triangle ABC} = 3 \cdot S_{\triangle AGG'} = 18$.

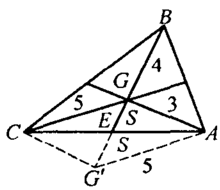
2. 选 C. 如图,由题意易得梯形 $BPDE$,其中 $BE \parallel DP$,则

$$S_{\triangle BFD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} S_{\triangle EPD} = \frac{1}{4} S_{\triangle CED} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} S_{ABCD}\right) = \frac{1}{16} a^2$$

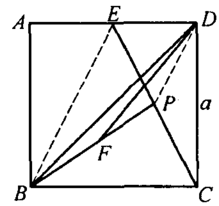
3. 如图,因 $PX \parallel QY$,则四边形 $PXYQ$ 为梯形,易知 $S_1 = S_2$,同理 $S_3 = S_4$,即

$$S_B = S_1 + S_3 + S_{PEFS} = S_2 + S_4 + S_{PEFS} = S_A$$

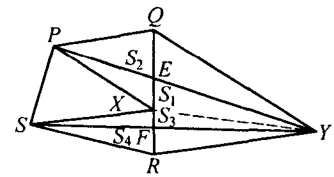
故 $S_A = S_B$,故选 A.



第 1 题



第 2 题



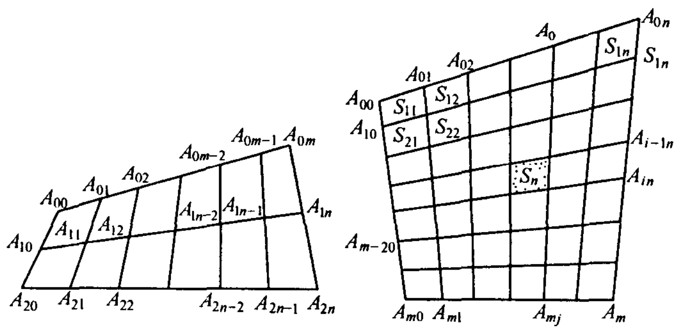
第 3 题

4.证明中需要平面几何中的一个事实:

引理　顺次联结任意四边形各边中点得到平行四边形.

用数学归纳法证明:当 $m = n = 2$ 时,由引理知结论成立.

对 $m = 2$,考虑 n 为任意自然数的情形如图中(a),$n = 2$,结论成立,设结论对 $n - 1$ 成立,就是说,线段 $A_{01}A_{21},\cdots,A_{0n-2}A_{2n-2}$的中点 $A_{11},\cdots,A_{1n-2}$都在线段 $A_{00}A_{20}$与 $A_{0n-1}A_{2n-1}$中点连线 $A_{10}A_{1n-1}$上,就是说这些线段的中点共线且 $A_{10}A_{11} = A_{11}A_{12} = \cdots = A_{1n-2}A_{1n-1}$.另一方面,因结论对 $m = n = 2$ 成立,考虑四边形 $A_{0n-2}A_{2n-2}A_{2n}A_{0n}$,知三条线段 $A_{0n-2}A_{2n-2}$、$A_{0n-1}A_{2n-1}$、$A_{0n}A_{2n}$中点 A_{1n-2}、A_{1n-1}、A_{1n}共线且$A_{1n-2}A_{1n-1} = A_{1n-1}A_{1n}$,说明 A_{1n}在直线$A_{10}A_{1n-1}$上,即所有线段 $A_{0j}A_{2j}$,$j = 0,\cdots,n$ 中点共线且$A_{10}A_{11} = \cdots = A_{1n-1}A_{1n}$.



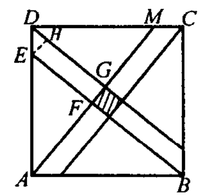
(a)　(b)

第 4 题

现设结论对任意自然数 n 和 $m - 1$ 成立,如图中(b),即所有线段 $A_{0j}A_{m-1j}$ $(j = 0,\cdots,n)$对应等分点共线,所有线段 $A_{i0}A_{in}(i = 0,\cdots,m - 1)$对应等分点共

线;又线段 $A_{m-20}A_{m-2n}$,$A_{m-10}A_{m-1n}$,$A_{m0}A_{mn}$对应等分点共线,即线段 $A_{m0}A_{mn}$等分点 $A_{m1},A_{m2},\cdots,A_{mn-1}$分别在直线 $A_{01}A_{m-11},A_{02}A_{m-12},\cdots,A_{0n-1}A_{m-1n-1}$上,而且 $A_{m-1j}A_{mj}=A_{m-2j}A_{m-1j}(j=0,\cdots,n)$. 这就证明了结论对任何自然数 m,n 成立.

5. 如图,作 $EH\perp DG$ 于 H. 由已知 $DM=\frac{n-1}{n}$,则



第 5 题

$$AM=\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

$$\cos\angle DEH=\cos\angle DAM=\frac{DA}{DM}=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}$$

$$EH=DE\cos\angle DEH=\frac{1}{n\sqrt{1^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}$$

中间阴影小正方形的面积 $S=FG^2=EH^2$. 于是有

$$S=\frac{1}{n^2\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]}=\frac{1}{1\,985}$$

则
$$2n^2-2n+1=1\,985$$

即
$$n^2-n-992=0$$

得 $n_1=32,n_2=-31$(舍去),因此 $n=32$.

6. 由 $\frac{AS}{SD}=\frac{2}{5}$ 得 $\frac{S_{ASCQ}}{S_{ABCD}}=\frac{2}{7}$,则 $S_{ASCQ}=\frac{2}{7}\times 740$,令 $WQ=SY=a$,则

$$\frac{AZ}{SY}=\frac{AD}{SD}=\frac{7}{5}$$

故
$$AZ=\frac{7}{5}a$$

又由
$$\frac{AZ}{ZW}=\frac{AP}{PB}=\frac{5}{2}$$

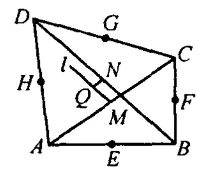
有
$$ZW=\frac{2}{5}AZ=\frac{14}{25}a$$

从而
$$AQ=AZ+ZW+WQ=\frac{7}{5}a+\frac{14}{25}a+a=\frac{74}{25}a$$

即
$$\frac{S_{WXYZ}}{S_{ASCQ}}=\frac{WZ}{AQ}=\frac{14}{74}$$

故
$$S_{WXYZ}=\frac{14}{74}S_{ASCQ}=\frac{14}{74}\cdot\frac{2}{7}\cdot 740=40$$

7.如图,设凸四边形为 $ABCD$,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点,则 $EH=FG=\frac{1}{2}BD$,且 EH、FG 平行于 BD.过 AC 的中点 M 作 BD 的平行线 l.



第7题

于是点 A 和点 C 到直线 l 的距离相等,不妨设这个距离为 $4d$.注意到

$$S_{ABCD}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle BCD}=4dBD$$

由于对 l 上的任意一点 P 都有

$$S_{AEPH}=S_{\triangle AEH}+S_{\triangle PEH}=2dEH=dBD=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

同理

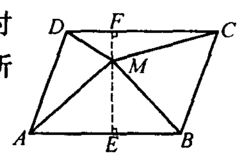
$$S_{CFPG}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

设点 Q 符合题目要求,则点 Q 必在直线 l 上.

同样地,点 Q 也必在过 BD 的中点且平行于 AC 的直线上,由于该直线不与 l 平行,则必与 l 相交.

这样点 Q 就是唯一的交点,即满足题目条件的点存在而且唯一.

8.设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O,不难证明对角线分平行四边形所成的四个三角形等积,则点 O 具有所要求的性质,以下再证明这种点的唯一性.



第8题

如图,设 M 为▱$ABCD$ 内部一点,过 M 作 AB 的垂线,分别交 AB、CD 于 E、F,则

$$S_{\triangle MAB}+S_{\triangle MCD}=\frac{1}{2}ME\cdot AB+\frac{1}{2}MF\cdot CD=\frac{1}{2}(ME+MF)AB=$$

$$\frac{1}{2}EF\cdot AB=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$$

同理

$$S_{\triangle MAD}+S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$$

因这四个三角形的面积可以排成等比数列,设这等比数列为

$$a,ar,ar^2,ar^3,r>0$$

根据以上讨论这四项中某两项之和必等于另外两项之和.这样的等比数列是常数列,因为

(1)若

$$a+ar=ar^2+ar^3$$

则

$$(r-1)(r+1)^2=0,r=1$$

(2)若

$$a + ar^2 = ar + ar^3$$

则
$$(r-1)(r^2+1)=0, r=1$$

(3)若

$$a + ar^3 = ar + ar^3$$

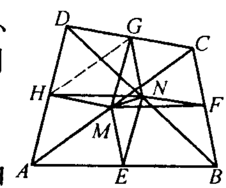
则
$$(r-1)^2(r+1)=0, r=1$$

这表明四个三角形的面积总是相等,且都等于$\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,故点 M 必与 O 重合.

9. 如图,在凸四边形 $ABCD$ 中,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点. M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点. 则

$$EN \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}AD \mathrel{\underset{=}{\parallel}} MG$$

即 $ENGM$ 是平行四边形. 同理,$FNHM$ 也是平行四边形. 由题设 $S_{\square ENGM} = S_{\square FNHM}$,则



第 9 题

$$S_{\triangle MNG} = \frac{1}{2}S_{\square ENGM} = \frac{1}{2}S_{\square FNHM} = S_{\triangle NMH}$$

因此$\triangle MNG$ 和$\triangle NMH$ 的 MN 边上的高相等,由此得 $MN /\!/ HG$,又 $HG /\!/ AC$,AC 和 MN 都过点 M. 所以 MN 重合于 AC.

因为 $S_{\triangle MNG} = S_{\triangle NME}$,所以$\triangle MNG$,$\triangle NME$ 的 MN 边上的高相等.

又 G 是 CD 的中点,易证$\triangle ACD$ 的 AC 边上的高是$\triangle MNG$ 的 MN 边上的高的两倍.

同理,$\triangle ACB$ 的 AC 边上的高是$\triangle NME$ 的 MN 边上的高的两倍.

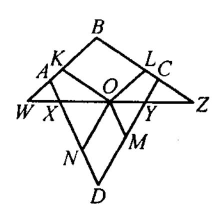
因此 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACB}$.

10. **证法 1** (1)如果 O 在 AC 上,则 $ABCD$、$AKON$、$OLCM$ 相似,且 $AC = AO + OC$,这时可得

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$$

(2)如图,如果 O 不在 AC 上,可假定 O 和 D 在 AC 的同侧.

一条过点 O 的直线分别交 BA、AD、CD 与 BC 与 W、X、Y、Z 各点.



第 10 题(1)

开始时,令 $W = X = A$,这时$\frac{OW}{OX} = 1$,而$\frac{OZ}{OY} > 1$,然后围绕点 O 旋转该直线,

最后到 $Y=Z=C$ 时结束,这时$\frac{OW}{OX}>1$,而$\frac{OZ}{OY}=1$.

因而,在旋转过程中,必存在某一位置,使得$\frac{OW}{OX}=\frac{OZ}{OY}$,将直线固定在这一位置.

设 T_1、T_2、P_1、P_2、Q_1、Q_2 分别为四边形 $KBLO$、四边形 $NOMD$、$\triangle WKO$、$\triangle OLZ$、$\triangle ONX$、$\triangle YMO$ 的面积,则所要证明的结果等价于

$$T_1+T_2\geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$$

由于

$$\triangle WBZ\backsim\triangle WKO\backsim\triangle OLZ$$

又有

$$\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}=\sqrt{P_1+T_1+P_2}\left(\frac{WO}{WZ}+\frac{OZ}{WZ}\right)=\sqrt{P_1+T_1+P_2}$$

平方得

$$T_1=2\sqrt{P_1P_2}$$

类似得

$$T_2=2\sqrt{Q_1Q_2}$$

因为$\frac{OW}{OX}=\frac{OZ}{OY}$,所以

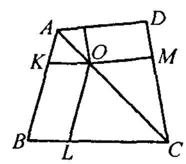
$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{OW^2}{OZ^2}=\frac{OX^2}{OY^2}=\frac{Q_1}{Q_2}$$

设 $k=\frac{Q_1}{P_1}=\frac{Q_2}{P_2}$,则

$$T_1+T_2=2\sqrt{P_1P_2}+2\sqrt{Q_1Q_2}=2\sqrt{P_1P_2}(1+k)=2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2}=$$
$$2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)}\geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$$

证法 2 若 O 在对角线 AC 上,那么

$$S_{\triangle OAN}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ACD},S_{\triangle KOA}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ABC}$$



第10题(2)

两式相加,得

$$S_1=\frac{AO^2}{AC^2}S$$

即

$$\sqrt{S_1}=\frac{AO}{AC}\sqrt{S}$$

同理

$$\sqrt{S_2}=\frac{OC}{AC}\sqrt{S}$$

所以

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$$

对于一般情况,过 O 作 BD 的平行线交 AC 于 O'.关于 O',设相应的四边形 $O'N'AK'$、$O'M'CL'$ 的面积为 S'_1、S'_2,则

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S'_1}+\sqrt{S'_2}$$

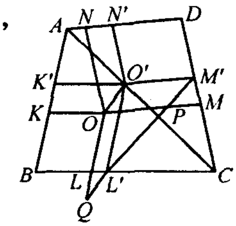
联结 $L'M'$，交 OM 于 P. $M'L'$ 与 OL 的延长线相交于 Q，由 $O'L' /\!/ AB$，$O'M' /\!/ AD$，得

$$\frac{CL'}{CB}=\frac{CO'}{CA}=\frac{CM'}{CD}$$

所以 $L'M' /\!/ BD$，从而

$$S_{OO'M'M}\geqslant S_{OO'M'P}=S_{OO'L'Q}\geqslant S_{OO'L'L}$$

即 $S'_2>S_2$，同理 $S'_1\geqslant S_1$，故$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S'_1}+\sqrt{S'_2}$.



第 10 题(3)

第 2 章　1979 年试题的诠释

这一年第二试平面几何试题有 3 道，即第 2、4、6 题.

试题 A1　命题"一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形"对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形满足已给条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法.

解　命题不对，这只要举出一个符合条件，但非平行四边形即可.

作法 1　设 $ABCD$ 是一平行四边形，且 $AC < BC$，$\angle BAC \neq 90°$，过 A、B、C 作外接圆，以 C 为圆心，CB 为半径画弧交圆于 E，联结 AE，则

$$EC = BC = AD, \angle ABC = \angle AEC = \angle ADC$$

故四边形 $AECD$ 符合所要求的条件，但显然它不可能是平行四边形，如图 2.1 所示.

作法 2　我们可任意作一等边$\triangle ABC$，在底边 BC 上取点 D，使得 $BD > DC$，由 D 作$\angle 2 = \angle 1$，如图 2.2 所示，取 $DE = AC$，联结 AE.

由$\triangle ADC \cong \triangle DAE$，知$\angle E = \angle C = \angle EDC$.

又 $DE = AC = AB$，所以四边形 $ABDE$ 满足已给条件，但 $AE = DC < BD$，故四边形 $ABDE$ 不是平行四边形.

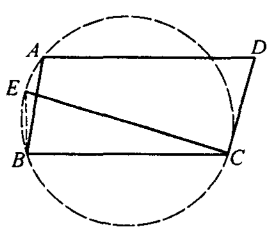


图 2.1

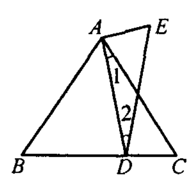


图 2.2

试题 A2　在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的周界上任意两点 P、Q 间连一曲线，把正方形的面积分为相等的两部分，求证：曲线的长不小于 1.

证明　我们先讨论这两点在正方形边界上的各种可能分布情况：(1)在同

一条边上;(2)在相邻的两边上;(3)在相对的两边上.

显然(3)是不证自明的,(1)、(2)均可以化归为(3).

对于(1),当 P、Q 分别在 AB、AD 上时,如图 2.3(a)所示,联结 BD,则 BD 与曲线$\widehat{PQ}$必有交点 K,否则曲边$\triangle APQ$ 完全位于$\triangle ABD$ 内,曲线$\widehat{PQ}$不平分正方形面积.今以 BD 为轴,将曲线$\widehat{KQ}$翻转到曲线$\widehat{KQ}$,则 Q' 落在 CD 上,至此,问题已化归为(3).

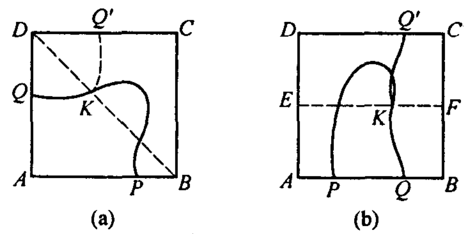


图 2.3

对于(2),当 P、Q 都在 AB 上时,如图 2.3(b)所示,设 E、F 分别为 AD、BC 的中点,则 EF 与曲线$\widehat{PQ}$必有交点 K(理由同前).以 EF 为轴,将曲线$\widehat{KQ}$翻转到$\widehat{KQ'}$,则 Q'落在 CD 上,此时,问题也化归为(3).

综上所述,命题获证.

试题 A3 如图 2.4,两圆圆 O_1、圆 O_2 相交于 A、B,圆 O_1 的弦 BC 交圆 O_2 于 E,圆 O_2 的弦 BD 交圆 O_1 于 F.证明:(1)若$\angle DBA=\angle CBA$,则 $DF=CE$;(2)若 $DF=CE$,则$\angle DBA=\angle CBA$.

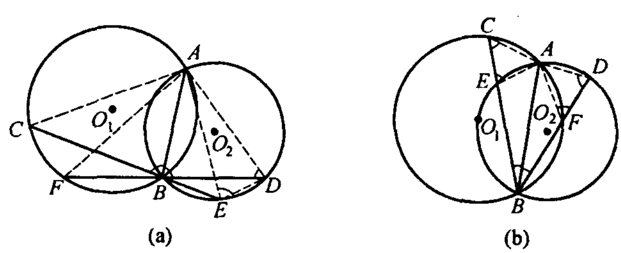


图 2.4

证明 (1)如图 2.4(a),因 A、B、E、D 四点共圆,有$\angle ABD=\angle AED$,且$\angle ABC=\angle ADE$,而$\angle ABD=\angle ABC$,故$\angle AED=\angle ADE$,于是 $AD=AE$.

又由$\angle ADB=\angle AEB$,$\angle AFB=\angle ACB$,知$\triangle ADF\backsim\triangle AEC$.注意到 $AD=$

AE,则$\triangle ADF \cong \triangle AEC$,故 $DF = EC$.

如图 2.4(b),由 A、E、B、D 及 A、C、B、F 分别四点共圆,有$\angle AEC = \angle ADF$,$\angle ACE = \angle AFD$. 又由$\angle CBA = \angle ABD$,知 $AC = AF$,$AE = AD$,有$\triangle AEC \cong \triangle ADF$,故 $DF = CE$.

(2)由 $DF = CE$ 及(1)中证明,可得$\triangle ADF \cong \triangle AEC$,由此,可推证得$\angle DBA = \angle CBA$.

第 1 节　几个平行四边形判定的假命题①

本节中的试题 A1 中的命题是一个判定平行四边形的假命题,前面已举出两道反例,下面再举出一道反例.

反例　如图 2.5,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$\angle A = 30°$,$\angle B = 60°$. 在 AC 上截取 $AD = BC$.

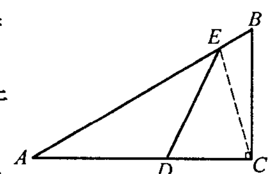


图 2.5

以 D 为圆心,AD 长为半径画弧必可交线段 AB 于 E,联结 DE.

可知四边形 $EDCB$ 中,一组对边 $DE = BC$;一组对角$\angle EDC = \angle B = 60°$. 但由于 BE 交 CD 于 A. 可知这个四边形不是平行四边形.

这样的假命题其迷惑性较大,实在是有澄清之必要. 除了如上的假命题之外,还有如下的假命题. 为方便我们称试题 A1 中的命题为假命题 1.

假命题 2　一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

反例　如图 2.6,$\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,在 AC 上任取一点 D,延长 AB 到 E,使 $BE = CD$,联结 ED,设交 BC 于 F,过 D 作 $DG /\!/ AE$ 交 BC 于 G,则

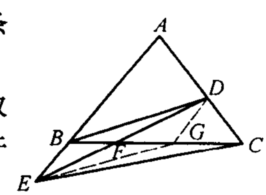


图 2.6

$$\angle DGC = \angle ABC = \angle ACB$$

从而
$$DG = CD = BE$$

则四边形 $BEGD$ 为平行四边形,故 $EF = FD$.

于是可知在四边形 $BECD$ 中,一组对边相等($BE = CD$),一条对角线 ED 被另一对角线 BC 平分($EF = FD$),但由于 BE 与 CD 相交于 A,所以四边形 $BECD$ 不是平行四边形.

① 沈君岚. 几个平行四边形判定的假命题[J]. 中学生数学,1999(12):2.

假命题 3 一组对角相等且这一组对角的顶点所联结的对角线被另一条对角线平分的四边形是平行四边形.

反例 如图 2.7,四边形 $ABCD$ 中,两对角线相交于点 O,$AB=AD$,$BC=CD$,且 $AB\neq BC$.

显然$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,则$\angle ABC=\angle ADC$,又易证得 AC 是线段 BD 的垂直平分线.故 $BO=OD$.

即在四边形 $ABCD$ 中,有一组对角($\angle ABC=\angle ADC$)相等,这组对角顶点所联结的对角线 BD 被另一条对角线平分,但由于 $BC\neq AD$.所以这个四边形不是平行四边形.

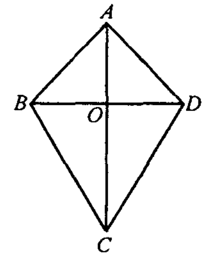


图 2.7

第 2 节　面积平分问题

命题 1 在半径为 R 的圆周上任意取两点 P、Q,在这两点间连一条曲线,把圆分成面积相等的两部分.求证:曲线的长不小于 $2R$.

证明 我们将问题分割为两种情况:(i) P、Q 位于直径的两端点;(ii) P、Q 为非直径的弦的两端点.

(i)是显然成立的,因为 P、Q 两点间曲线长以线段(直长 $2R$)最短.

(ii)是可以化为(i)的情形的.如图 2.8 所示,过 P 作圆的直径 PQ',联结 QQ',再作垂直于弦 QQ' 的直径 MN,则 MN 必与曲线$\overset{\frown}{PQ}$有交点 K(否则曲线不平分圆面积).

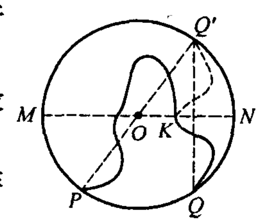


图 2.8

以 MN 为轴,将曲线$\overset{\frown}{KQ}$翻转到曲线$\overset{\frown}{KQ'}$,此时,问题便化归为(i).

综上,命题获证.

注 如果把上述命题中的圆变为边长为 1 的正方形,则为试题 A2.

命题 2 一个三角形三边之长为 6、8、10,求证:仅仅存在一条直线同时平分这个三角形的面积和周长.

(第 17 届加拿大数学奥林匹克题)

证明 由 $6^2+8^2=10^2$ 可知此三角形为直角三角形,设此三角形为$\triangle ABC$,且$\angle C$ 为直角,$AC=6$,$BC=8$,$AB=10$.

则$\triangle ABC$ 的周长为 24,面积也为 24.

显然,过$\triangle ABC$ 的任一顶点的直线不能满足题目的要求.

这是因为,任何平分面积的直线必定平分对边,这时,这样的直线自然不能

平分原三角形的周长，所以，符合要求的直线只能是与三角形的两边相交的直线.

(i)设符合要求的直线与 AB 及 AC 相交，交点记为 S 与 T.

设 $CT=x, AT=6-x$，于是由

$$AS+AT=\frac{1}{2}\times 24=12$$

得
$$AS=6+x$$

又因为这条直线也平分三角形的面积，那么

$$12=S_{\triangle AST}=\frac{1}{2}(6-x)(6+x)\sin A=\frac{1}{2}(36-x^2)\cdot\frac{8}{10}=\frac{2}{5}(36-x^2)$$

得
$$x=\sqrt{6}$$

从而，令 $AT=6-\sqrt{6}, AS=6+\sqrt{6}$，得到 S 和 T 两点，直线 ST 满足要求.

(ii)设符合要求的直线与 BC 及 BA 分别相交于 S 及 T.设

$$BS=6-x, BT=6+x$$

由平分面积的要求，应有

$$12=S_{\triangle BST}=\frac{1}{2}(6-x)(6+x)\sin B=\frac{3}{10}(36-x^2)$$

此方程无实数解.因此，这样的直线不存在.

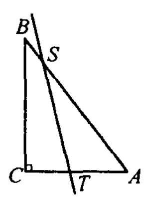


图 2.9

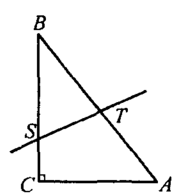


图 2.10

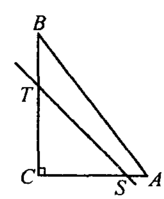


图 2.11

(iii)设符合要求的直线与 CA 及 CB 分别相交于 S 及 T.设

$$CS=6-x, CT=6+x$$

由平分面积的要求，应有

$$12=S_{\triangle CST}=\frac{1}{2}(36-x^2)$$

解得
$$x=2\sqrt{3}$$

从而
$$CS=6-2\sqrt{3}, CT=6+2\sqrt{3}$$

但
$$CT=6+2\sqrt{3}>8=CB$$

所以这样的直线不存在.由以上，仅有(i)中情况发生，即仅仅存在一条直线平

分这个三角形的面积和周长.

命题3[①] 试证:对于任意一个三角形,都存在一条同时平分这个三角形的面积与周长的直线段.

如图2.12,设$\triangle ABC$中$AB=c,AC=b,BC=a,a\geqslant b\geqslant c$,$p$为半周长,在$BC$上取$BD=m$,在$BA$上取$BE=n$,欲使$DE$为$\triangle ABC$一条周积平分线,即要使

$$m+n=p,mn=\frac{1}{2}ac \qquad ①$$

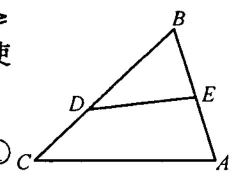


图2.12

(因$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin B=\frac{1}{2}S_{\triangle BCA}=\frac{1}{4}ac\sin B$).

因此,m、n应是二次方程

$$x^2-px+\frac{1}{2}ac=0 \qquad ②$$

的两个根,反之,方程②的二正实根m、n即为BD、BE之长.由于②的判别式

$$\Delta=p^2-2ac\geqslant\left(\frac{a+2c}{2}\right)^2-2ac\geqslant\frac{1}{4}(2\sqrt{2ac})^2-2ac\geqslant 0$$

且
$$m=\frac{p+\sqrt{p^2-2ac}}{2},n=\frac{p-\sqrt{p^2-2ac}}{2}>0$$

故方程②总有二正实根.依条件①,m、n容易如下法作出,如图2.13所示.

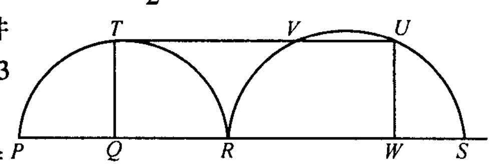


图2.13

(i)作直线l,在其上取$PQ=\frac{1}{2}a,QR=c,RS=p$;

(ii)分别以PR、RS为直径作半圈;

(iii)过Q作$QT\perp PR$交半圆于T;

(iv)过T作$TU/\!/PS$交另半圆于U、V;

(v)过U(或V)作$UW\perp RS$交RS于W,则$RW=m,WS=n$为所求.事实上

$$TQ^2=PQ\cdot QR=\frac{1}{2}ac=UW^2=RW\cdot WS=mn$$

且
$$m+n=p$$

类似于前面命题2的讨论,当$m\leqslant a,n<c$,即在长边BC上可取$BD=m$,在短边BA上取$BE=n$,作出$\triangle ABC$一条周积平分线.

---

① 胡炳生.三角形周积平分线再研究[J].中学生数学,1997(12):18.

但能在短边 BA 上取 $BD=m$，在长边 BC 上取 $BE=n$ 吗？不可能．事实上，只要 AB 确实是最短边，即 $a\geqslant b>c$，那么便有

$$m-c=\frac{1}{2}[\sqrt{p^2-2ac}-(2c-p)]>0 \qquad ③$$

因为　$③\Leftrightarrow(p^2-2ac)-(2c-p)^2>0\Leftrightarrow 2p-a-2c>0\Leftrightarrow b-c>0$

这说明以 $AC=b$ 为底的周积平分线只有一条．

若以长边 BC 为底，类似地可证存在且只存在一条周积平分线．

且以真正短边 $AB=c(a\geqslant b>c)$ 为底，则未必存在周积平分线．例如，在 $AB=3,AC=4,BC=5$ 的 Rt$\triangle ABC$ 中，若以 $AB=c=3$ 为底，则 $a=5,b=4,p=6,\Delta=p^2-2ab=-4$.

因此方程 $x^2-p+2ab=0$ 不存在实根．

综上所述，一个三角形的周积平分线至少存在两条，至多存在三条．特别地，等腰三角形底上中线是一条周积平分线，等边三角形的周积平分线是三边上的中线，仅此而已．

命题4[①]　三边互不相等的三角形中：

(1)平分面积的最短线段只有一条，端点在较长的两条边上．

(2)若较长两边为 b、c，则该线段长为$\sqrt{2(s-b)(s-c)}$（s 为半周长，下同）．

证明　(1)如图2.14，$\triangle ABC$ 中设 $a<b,a<c$，只要证明端点不是最短边的内点即可．

若 $N\in BC,M\in AB$，记 $BN=x,BM=y$，则由 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$知

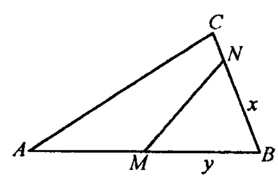


图2.14

$$\frac{1}{2}xy\sin B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ac\sin B$$

即
$$xy=\frac{1}{2}ac$$

此时　$MN^2=x^2+y^2-2xy\cos B=x^2+y^2-ac\cos B=x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}-ac\cos B$

记 $f(x)=x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}-ac\cos B$，则当 N 为 BC 的内点时，$x\in(0,a)$；当 N 与点 C 重合时，$x=a$，而

$$f(a)-f(x)-\left(a^2+\frac{a^2c^2}{4a^2}-ac\cos B\right)-\left(x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}-ac\cos B\right)=$$

① 孙四周．平分三角形面积的最短线段[J]．中学生数学，1997(12):11.

$$(a^2-x^2)\left(\frac{a^2c^2}{4a^2}-\frac{a^2c^2}{4x^2}\right)=\frac{(a^2-x^2)(x^2-c^2)}{4x^2}<0$$

则 $$f(a)<f(x)$$

故当 N 为 BC 的内点时,线段 MN 不是最短的.

同样,如果 M 在 AC 上,N 仍不能是 BC 的内点.故 M、N 必在边 AB、AC 上.

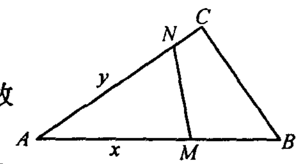


图 2.15

(2)如图 2.15,设 $a<b<c$,记 $AM=x$,$AN=y$.则

$$xy=\frac{1}{2}bc$$

$$MN^2=x^2+y^2-2xy\cos A\geqslant 2xy-2xy\cos A=bc-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$bc-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2}[a^2-(b-c)^2]=$$

$$\frac{1}{2}(a+b-c)(a+c-b)=2(s-b)(s-c)$$

即 $$MN\geqslant\sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

等式成立的条件是 $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}bc}$.

命题 5[①] 三角形中,若两边长为 a,另一边长为 c,则

(1)当 $a<c$ 时,平分面积的最短线段有两条,长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{c(2a-c)}$.

(2)当 $a>c$ 时,这样的线段有一条,长为$\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

(3)当 $a=c$ 即三角形为正三角形时,这样的线段有三条,长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

证明 (1)如图 2.16,当一点在底上,一点在腰上时,求得 $|MN|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{c(2a-c)}$.

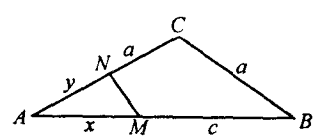


图 2.16

当两点都在腰上时,求得 $|MN|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

相比较,知最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{c(2a-c)}$.当 $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}ac}$时,取得最小值.且相应的线段有两条.

① 孙四周.平分三角形面积的最短线段[J].中学生数学,1997(12):11.

(2)、(3)的证明仿照可得,略.

推论　平分面积的最短线段的端点在最小角的两边上,且以该角为顶角截成一个等腰三角形.

注　如果等腰三角形的底角小于顶角,则两底角都认为是最小的;正三角形的三个角都认为是最小角.

为了讨论下面的两个命题,我们先引入一些概念①.

定义1　平面四边形内有一点 P,将点 P 与四个顶点联结,构成四个三角形.如果这四个三角形面积相等,则点 P 叫做这个四边形的面积平分点.

如图2.17,在四边形 $ABCD$ 中,有一点 P,联结 PA、PB、PC、PD,如果 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PDA}$,则点 P 为四边形 $ABCD$ 的面积平分点.

定义2　过四边形的顶点,且将四边形分成面积相等的两部分的直线,叫做四边形的一条面积平分线.

为了研究面积平分点的存在及其位置,我们先看如下的结论.

引理　在 $\triangle ABC$ 所在的平面上,使得 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}$ 的点 P 的轨迹,是 $\triangle ABC$ 中 BC 上的中线.

证明　(i)设点 P 是 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上任意一点,如图2.18所示.

因 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$,则 B、C 两点到 AD 的距离相等.

对于 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$,都以 AP 为底边,且 B、C 两点到 AP 的距离相等,故 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}$,即 $\triangle ABC$ 中,BC 上的中线上任意一点 P,都满足条件 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}$.

(ii)假设点 P 不在 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上,如图2.19所示,设 CP 交 AD 于 M,联结 BM,由前一部分证明可知 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$,则 $S_{\triangle ABP}<S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}<S_{\triangle ACP}$,所以,不在 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上的点 P 不满足条件.

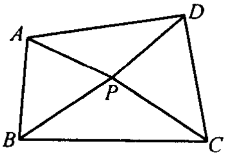


图2.17

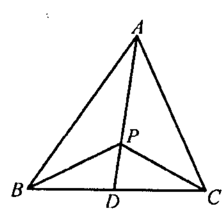


图2.18

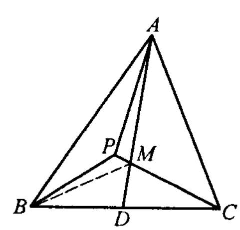


图2.19

① 王三福.四边形的好点与好线[J].中学生数学,1996(11):19-21.

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}$$

综合(i)、(ii),引理得证.

命题6 四边形中存在面积平分点的充要条件是四边形中有一条对角线平分另一条对角线,且好点是前一条对角线的中点.

证明 先证充分性.

如图2.20,在四边形 $ABCD$ 中,对角线相交于 O,且 AC 平分 BD.设 AC 的中点是 P,则有

$$S_{\triangle ADP}=S_{\triangle PCD},S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}$$

AC 平分 BD,即 $BO=DO$,根据引理可知,$S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PAB}$,$S_{\triangle PDC}=S_{\triangle PBC}$,则点 P 是四边形 $ABCD$ 中的面积平分点.

再证必要性.

如图2.21,在四边形 $ABCD$ 中,AC 交 BD 于 O,AC 的中点是 E.设四边形 $ABCD$ 的好点是点 P.

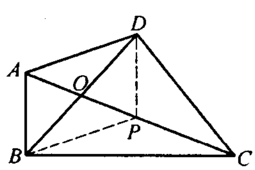


图2.20

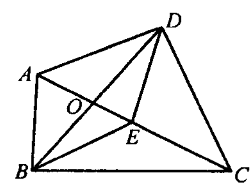


图2.21

由 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}$(根据引理可知),知点 P 在 $\triangle ABC$ 的中线 BE 上.又 $S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PCD}$(同理可知),则点 P 在 $\triangle ADC$ 的中线 DE 上.

如果 BE 与 DE 不重合,则点 P 就是 BE 与 DE 的交点 E,即点 P 为 AC 的中点.因

$$S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PAB},S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}$$

根据引理,点 P 在 $\triangle ABC$ 中 BD 的中线上,则 AC 是 $\triangle ABD$ 中 BD 的中线,即 AC 平分 BD.

如果 BE 与 DE 重合,则 BD 平分 AC,且点 P 在 BD 上.又由 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}$(根据引理),知点 P 是 BD 的中点.

综合(1)、(2),结论得证.

为了讨论命题7,先介绍四边形的面积平分线的作法.如图2.22,设四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 O,设 $AO<CO$,过点 A 作 BD 的平行线 GH,交 CB 延长线于 G,交 CD 延长线于 H.

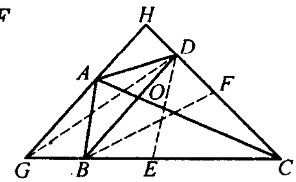


图2.22

设 GC 的中点为 E，CH 的中点为 F，联结 DE、BF 及 DG.

因 $GH/\!/BD$，则

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle GBD},S_{ABCD}=S_{\triangle DGC}$$

又 E 是 GC 中点，则

$$S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DGC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

则 DE 是四边形 $ABCD$ 过点 D 的面积平分线.

同理，BF 是四边形 $ABCD$ 过点 B 的面积平分线. 用同样的方法，我们可以作出过另外两个顶点的面积平分线.

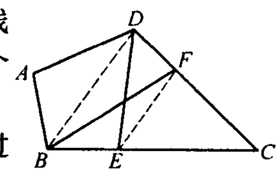


图2.23

命题7　过四边形相对两个顶点的两条面积平分线分别与四边形周界相交，这两个交点的连线必与这两个相对顶点的边线平行.

证明　如图2.23，在四边形 $ABCD$ 中，DE、BF 是过顶点 D、B 的两条面积平分线，点 E 在 BC 上，点 F 在 CD 上，联结 EF、BD. 因

$$S_{\triangle DEC}=S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

则

$$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle DEF}$$

即 B、D 两点到 EF 的距离相等.

故 $EF/\!/BD$. 结论得证.

命题8　四边形的四条面积平分线相交于一点的充要条件是：四边形有一条对角线平分另一对角线.

证明　先证充分性.

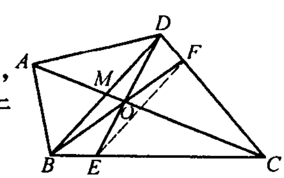


图2.24

如图2.24，在四边形 $ABCD$ 中，对角线相交于 M，DE、BF 是四边形 $ABCD$ 的两条好线，DE 与 BF 相交于点 O.

已知 AC 平分 BD，即 $MB=MD$. 根据引理

$$S_{\triangle MAB}=S_{\triangle MAD},S_{\triangle MBC}=S_{\triangle MDC}$$

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$，即 AC 是过点 A、C 的好线. 联结 EF，根据命题7，有 $EF/\!/BD$，故 $\frac{DF}{FC}=\frac{EB}{CE}$.

在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BM}{MD}=1$$

根据塞瓦定理的逆定理,BF、CM、DE 相交于一个点 O.于是,四边形 $ABCD$ 的四条面积平分线相交于一点.

再证必要性.

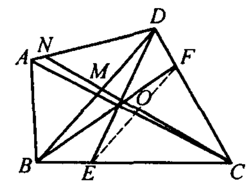


图 2.25

如图 2.25,四边形 $ABCD$ 的两条面积平分线 DE、BF 相交于 O,联结 CO 并延长,交 BD 于 M,交 AD 于 N.

已知四边形 $ABCD$ 的四条面积平分线相交于一点,故 CN 是过点 C 的面积平分线.联结 EF,根据命题 7,$EF\parallel BD$,所以$\frac{DE}{FC}=\frac{EB}{CE}$.

在$\triangle BCD$ 中,BF、DE、CM 相交于点 O,根据塞瓦定理,有

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BM}{MD}=1$$

而$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}=1$,而 $BM=MD$,又因 CN 是四边形 $ABCD$ 的面积平分线,则 $S_{\triangle DCN}=S_{ABCN}$.因 M 为 BD 的中点,则$S_{\triangle MBC}=S_{\triangle MCD}$,则 $S_{\triangle DMN}=S_{ABMN}$.

联结 AM,由 $S_{\triangle AMB}=S_{\triangle AMD}$,有点 N 与点 A 重合,即 AC 与 CN 重合,则 AC 是四边形 $ABCD$ 的好线.而已证明 CN 平分 BD,故 AC 平分 BD.综合上述两方面,结论得证.

第3节 平移变换

将一个平面图形 F 按一定方向移动一定距离变成图形 F' 的几何变换就是平行移动,简称平移,其中"按一定方向"(平移方向)移动的"定距离"(平移距离)可以用向量 $\boldsymbol{v}$ 来刻画,因此,平移变换记为 $T(\boldsymbol{v})$.图形 F 在 $T(\boldsymbol{v})$下变为图形 F',可以记为 $F\xrightarrow{T(\boldsymbol{v})}F'$.

平移有下列基本性质:

(1)平移变换下,对应线段平行(或共线)且相等.

(2)平移变换下,对应角的两边分别平行且方向一致,因此,对应角相等.

可见,在平移变换下,可以把一个角在保持大小不变、角的两边方向不变的的情况下移动位置,也可以使线段在保持平行且相等的条件下移动位置,从而达到将相关几何元素相对集中,使各元素之间的关系明朗化的目的.

例1 两条长为 1 的线段 AB 与 CD 相交于点 O,且$\angle BOD=60°$.求证:

$AC + BD \geqslant 1$.

分析　要证 $AC + BD \geqslant 1$，易联想到，将 AC、BD 和长为 1 的线段集中到一个三角形中，利用三角形不等式证明即可.

要保持 AC 长度不变，角 $60°$ 大小不变，可将 AC 平移到 BB_1. 如图 2.26，同时也就相当于将 AB 平移到 CB_1. 此时 $BB_1 = AC$，$\angle DCB_1 = \angle DOB = 60°$，$CB_1 = AB = 1 = CD$. 所以，$\triangle DCB_1$ 是等边三角形，$DB_1 = CD = 1$.

在 $\triangle DBB_1$ 中，有 $BB_1 + BD \geqslant DB_1$，即 $AC + BD \geqslant 1$.

证明略.

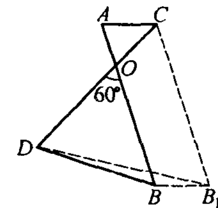


图 2.26

例 2　在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB /\!/ ED$，$BC /\!/ FE$，$CD /\!/ AF$，且对边之差 $BC - FE = DE - BA = FA - DC > 0$. 求证：六边形 $ABCDEF$ 的各内角均相等.

分析　六边形内角和为 $720°$. 要证各内角均相等，即证每个内角都等于 $120°$. 因此，问题就是要在对边平行且对边之差相等的条件下，推证六边形每个内角都为 $120°$. 而图中没有直接给出 $120°$ 的角，怎么办？我们只要有了 $60°$ 角就会产生 $120°$ 的角，而 $60°$ 角来自等边三角形的内角，题设条件中三组对边之差相等，且三组对边分别平行，这就启示我们，可以通过平移将"三组对边之差"集中在一个三角形中.

证明　如图 2.27，过 A 作 FE 的平行线，过 C 作 BA 的平行线，过 E 作 DC 的平行线. 这三条平行线两两相交于点 P、Q、R.

易知 $ABCQ$、$CDER$、$EFAP$ 均为平行四边形. 所以

$$AQ \perp\!\!\!\!\!\!= BC,\ CR \perp\!\!\!\!\!\!= DE,\ EP \perp\!\!\!\!\!\!= FA,\ AP \perp\!\!\!\!\!\!= FE,\ CQ \perp\!\!\!\!\!\!= BA,\ ER \perp\!\!\!\!\!\!= DC$$

故
$$PQ = AQ - AP = BC - FE$$
$$QR = CR - CQ = DE - BA$$
$$RP = EP - ER = FA - DC$$

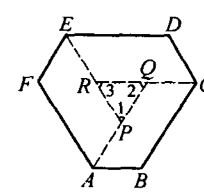


图 2.27

因为
$$BC - FE = DE - BA = FA - DC$$
则
$$PQ = QR = RP$$
所以，$\triangle PQR$ 为等边三角形. 故
$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$$
因此
$$\angle BCD = \angle DCR + \angle RCB = \angle 3 + \angle 2 = 120°$$
$$\angle CDE = \angle ERC = 180° - \angle 3 = 120°$$
同理可证
$$\angle ABC = \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB = 120°$$

例 3　如图 2.28，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1 交 $\triangle ABC$ 各边分别于 C_2、C_3、A_2、A_3、B_2、B_3. 已知 $A_2C_3 = C_2B_3 = B_2A_3$，且 $C_2C_3^2 +$

$B_2B_3^2=A_2A_3^2$. 证明: $A_1B_1\perp A_1C_1$.

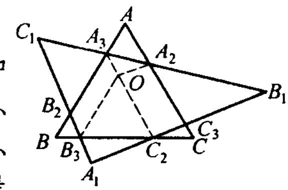


图 2.28

分析 要证 $A_1B_1\perp A_1C_1$, 只须证$\angle B_1A_1C_1=90°$. 而已知 $C_2C_3^2+B_2B_3^2=A_2A_3^2$, 酷似勾股定理的关系式, 但 C_2C_3、B_2B_3、A_2A_3 并不是一个三角形的三条边, 不妨设法平移线段 C_2C_3、B_2B_3、A_2A_3 成为一个三角形. 这时, 所成的三角形的最大角将是直角. 只须证$\angle B_1A_1C_1$ 等于这个直角就可以了.

证明 如图 2.28, 过 A_2 作 C_3C_2 的平行线交过 C_2 所作 C_3A_2 的平行线于点 O. 则 $A_2OC_2C_3$ 是平行四边形. 故

$$A_2O=C_3C_2, OC_2=A_2C_3=B_3C_2$$

又因为$\angle OC_2B_3=\angle C=60°$, 所以, $\triangle OB_3C_2$ 是正三角形. 从而

$$\angle OB_3C_2=60°=\angle B\Rightarrow OB_3/\!/A_3B_2$$

且

$$OB_3=C_2B_3=A_3B_2$$

因此, $OB_3B_2A_3$ 是平行四边形. 故 $OA_3/\!/B_3B_2$, 且 $OA_3=B_3B_2$, 因为

$$(C_2C_3)^2+(B_2B_3)^2=(A_2A_3)^2$$

则

$$(OA_2)^2+(OA_3)^2=(A_2A_3)^2$$

由勾股定理逆定理得$\angle A_2OA_3=90°$. 由已证 $OA_3/\!/B_3B_2$, 即 $OA_3/\!/A_1C_1$, $A_2O/\!/C_3C_2$, 即 $A_2O/\!/B_1A_1$, 所以, $\angle C_1A_1B_1=90°$. 故 $A_1B_1\perp A_1C_1$.

例 4 如图 2.29, 已知平面上三个半径相等的圆圆 O_1、圆 O_2、圆 O_3 两两相交于 A、B、C、D、E、F. 求证: 弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$的和等于 180°.

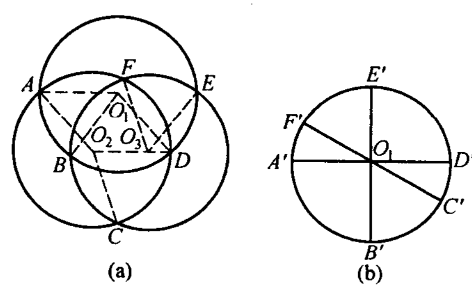


图 2.29

证明 设这三个圆心与交点的连线如图 2.29 所示, 易知 AO_2DO_1 为平行四边形. 即知 $DO_2\ \underline{\underline{/\!/}}\ AO_1$.

同理, $O_3E\ \underline{\underline{/\!/}}\ BO_1$, $O_3F\ \underline{\underline{/\!/}}\ CO_2$.

于是, 可分别将圆 O_2、圆 O_3 平移使之与圆 O_1 重合.

设 $CD\xrightarrow{\text{平移}}C'D'$, $EF\xrightarrow{\text{平移}}E'F'$, 则 A'、O_1、D' 共线, B'、O_1、E' 共线, C'、O_1、F' 共线. 由此即知

$$\angle AO_1B+\angle CO_2D+\angle EO_3F=\angle AO_1B+\angle C'O_1D'+\angle E'O_1F'=180°$$

证毕.

第4节　相交两圆的性质

两圆相交为圆周角定理、圆内接四边形性质定理提供了用武之地，由此我们也可获得相交两圆的一系列有趣性质.

性质1　相交两圆的连心线垂直平分公共弦.

性质2　以相交两圆的一交点为顶点，过另一交点的割线为对边的三角形称为两相交圆的内接三角形. 相交两圆的内接三角形的三个内角均为定值.

推论1　在相交两圆中，内接三角形都相似. 如图2.30，$\triangle ACD$、$\triangle AGH$、$\triangle BEF$ 均相似.

推论2　在相交两圆中，若公共弦与内接三角形的一边垂直，则另两边必分别为两圆直径，反之亦真. 如图2.30中，AC、AD 分别为圆 O_1、圆 O_2 的直径$\Leftrightarrow AB\perp CD$.

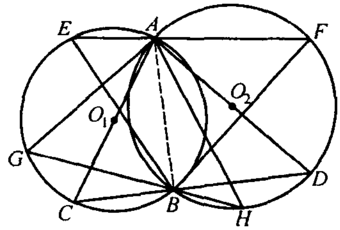


图2.30

推论3　在相交两圆中，内接三角形的交点(两圆交点)顶点，两非交点顶点以及两非交点顶点处的两切线交点，此四点共圆. 或两非交点顶点处的两切线交点在内接三角形的外接圆上.

性质3　两相交圆的公共弦所在直线平分外公切线线段.

性质4　以相交两圆的两交点分别为视点，对同一外公切线线段的张角的和为180°.

性质5　两相交圆为等圆的充要条件是下述条件之一成立：(1)公共弦对两圆的张角相等；(2)过同一交点的两条割线交两圆所得两弦相等.

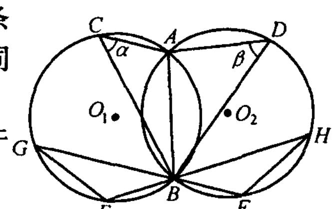


图2.31

事实上，如图2.31所示，圆 O_1 与圆 O_2 相交于 A、B.

(1)令$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADB=\beta$，圆 O_1 与圆 O_2 为等圆$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta(\alpha、\beta\in(0,\pi))$.

(2)圆 O_1 与圆 O_2 为等圆得

$$\frac{EG}{\sin\angle GBE}=\frac{FH}{\sin\angle HBF}\Leftrightarrow GE=HF$$

性质6　过相交两圆的两交点分别作割线，交两圆于四点，同一圆上的两

点的弦互相平行.

事实上,如图 2.32 所示,即可证得 $CE // DF$(证略).

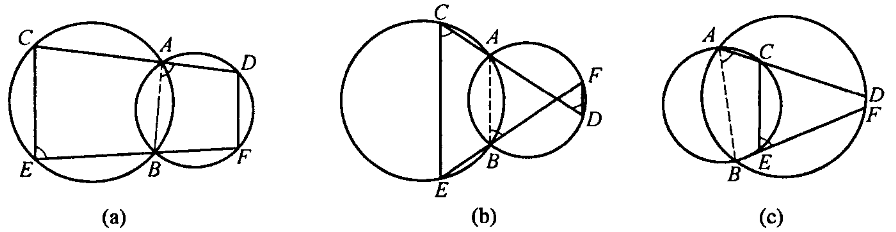


图 2.32

例 1 如图 2.33,证明:若凸五边形 $ABCDE$ 中,$\angle ABC = \angle ADE$,$\angle AEC = \angle ADB$,则 $\angle BAC = \angle DAE$.

(第 21 届全俄中学生(10 年级)数学奥林匹克题)

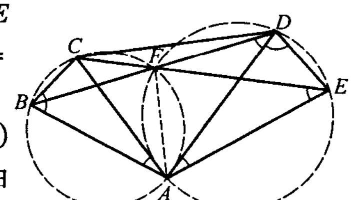


图 2.33

证明 设对角线 BD 与 CE 相交于 F. 由 $\angle AEC = \angle AEF = \angle ADB = \angle ADF$,知 A、E、D、F 共圆. 因此,$\angle AFE = \angle ADE = \angle ABC$,即 $\angle ABC + \angle AFC = 180°$,故 A、B、C、F 共圆.

此时,两圆圆 $ABCF$ 与圆 $AFDE$ 相交于点 F、A,从而由相交两圆性质 2 的推论 1,知 $\triangle ADB \backsim \triangle AEC$,即 $\angle BAD = \angle CAE$,故 $\angle BAC = \angle DAE$.

例 2 如图 2.34,已知圆 O_1 与圆 O_2 相交于 A、B,直线 MN 垂直于 AB 且分别与圆 O_1、圆 O_2 交于 M、N,P 为线段 MN 的中点,Q_1、Q_2 分别是圆 O_1、圆 O_2 上的点,$\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2$,求证:$PQ_1 = PQ_2$.

(1985 年广州、武汉、福州联合初中竞赛题)

证明 联结 MB、BN,因 $BA \perp MN$,则由相交两圆性质 2 的推论 2,知 O_1 在 MB 上,O_2 在 BN 上. 联结 O_1O_2、O_1P,则四边形 O_1O_2NP 为平行四边形,即 $O_1P = O_2N = O_2A$. 于是,知 O_1O_2AP 为等腰梯形,从而

$$\angle AO_1P = \angle AO_2P, PO_2 = AO_1 = O_1Q_1$$

又 $\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2$,注意 $O_1P = O_2N = O_2Q_2$,便有 $\triangle O_1Q_1P \cong \triangle O_2PQ_2$. 故 $PQ_1 = PQ_2$.

例 3 如图 2.35,圆 O_1 与圆 O_2 的半径均为 r,圆 O_1 过 $\square ABCD$ 的两顶点 A、B,圆 O_2 过顶点 B、C,M 是圆 O_1、圆 O_2 的另一个交点. 求证:$\triangle AMD$ 的外接圆半径也是 r.

证明　作▱$ABMN$，联结 ND、MC，则四边形 $DCMN$ 也是平行四边形，记 $\angle BAM=\alpha$，$\angle BCM=\beta$，由于圆 O_1 与圆 O_2 是等圆，由相交两圆的性质 5(1)，知 $\alpha=\beta$.

例 4　如图 2.36，自$\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 上任一点 P，引三边或其延长线的垂线 PL、PM、PN，分别交 BC 于 L，交 AB 于 M，交 CA 于 N，交圆 O 分别于 A'、B'、C'. 求证：$A'A /\!/ B'B /\!/ C'C$.

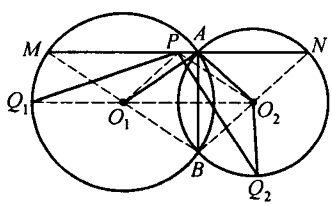


图 2.34

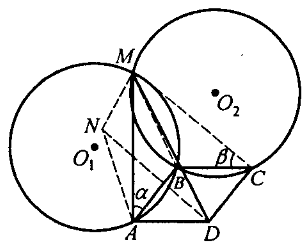


图 2.35

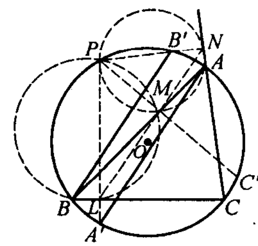


图 2.36

证明　注意到西姆松定理，知 L、M、N 三点共线.

由 P、B、L、M 四点共圆，且此圆与$\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 相交于 P、B 两点，BC、PC' 是过这两相交圆交点的两条割线，根据相交两圆性质 5，知 $LN /\!/ CC'$. 同样，PA'、BA 也是过这两相交圆交点的两条割线，由性质 6 有 $LM /\!/ A'A$. 故 $A'A /\!/ C'C$.

又由 P、M、A、N 四点共圆，此时 PN、AB 是分别过圆 $PMAN$ 与圆 $PABC$ 的交点 P、A 的两条割线，由性质 6 知 $B'B /\!/ NL$，故 $A'A /\!/ B'B /\!/ C'C$.

例 5　如图 2.37，等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AB 延长线上一点，E 是 AC 上一点，且 $CE=BD$，DE 交 BC 于 F，经过 B、D、F 的圆交$\triangle ABC$ 的外接圆于 G. 求证：$GF\perp DE$.

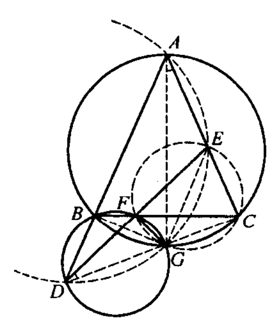


图 2.37

证明　由题设，知 B、D、G、F 及 A、B、G、C 分别四点共圆，联结 BG、DG、AG，有 $\angle FDG=\angle FBG=\angle CBG=\angle GAC=\angle GAE$，从而知 A、D、G、E 四点共圆. 此时，联结 EG、FG，则 $\angle GEC=\angle ADG=\angle BDG=\angle CFG$，所以 G、C、E、F 四点共圆. 于是，DE、BC 是过两相交圆圆 $BDGF$ 与圆 $GCEF$ 的交点 F 的两条割线.

由于 $CE=BD$,$\angle CFE=\angle BFD$,由两相交圆性质 5(2),知圆 $BDGF$ 与圆 $GCEF$ 是等圆.又由 A、B、G、C 共圆,有$\angle DBG=\angle ECG$.再注意到性质 5(2).知 $DG=GE$.

因 B、D、G、F 共圆,有$\angle ABC=\angle ABF=\angle FGD$.而$\angle ECF=\angle ACB=\angle ABC$,故$\angle FGD=\angle ECF$,即有 $DF=FE$.此时,推知$\triangle DGF\cong\triangle EGF$,有$\angle DFG=\angle EFG$,故 $GF\perp DE$.

注 可参见第 26 章第 1 节中性质 30.

练 习 题

1.两圆圆 O_1 与圆 O_2 相交于点 A 和 B,过点 B 作两直线与两圆的交点分别为 P、Q、C、D(P、C 在圆 O_1 上),且 $CD\perp AB$,求证:$PC:QD$ 为定值.

2.两等圆相交于 A、B,过 A 作直线与两圆分别交于 C、D.若 E 为 CD 的中点,求证:$BE\perp CD$.

3.两圆相交于 A、B,过 A 任作直线被两圆所截得的线段为 PQ,又过 A 作 AB 的垂线,被两圆所截得的线段为 CD.求证:$PQ\leqslant CD$.

4.圆 O_1 与圆 O_1 相交于 A、B 两点,割线 CE、FD 都过点 B(F、C 在圆 O_1 上).若$\angle ABC=\angle ABD$,求证:$CE=FD$.

5.梯形 $ABCD$ 中,$AB\parallel CD$,$AB>CD$,K、M 分别是腰 AD、CB 上的点,$\angle DAM=CBK$.求证:$\angle DMA=\angle CKB$.

6.定长弦 PQ(长度小于直径)的两端在半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上滑动.试证:不论 PQ 在什么位置,从 P、Q 分别向弦 AB 作垂线,其垂足 P'、Q' 与 PQ 中点 N 所成三角形都相似.

(1981 年福州市竞赛题)

7.三圆两两相交,并过公共点 M,而另一交点分别为 P、Q、R.过其中一圆的$\overset{\frown}{PQ}$上(不含点 M)行取两点 A 与 A'(点 P、Q、M 除外),引直线 AP、AQ、$A'P$、$A'Q$,与其他两圆依次相交于 B、C、B'、C'.求证:$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

练 习 题 解 答

1.联结 AP、AC、AQ、AD,由$\angle PAQ=\angle CAD$,有$\angle PAC=\angle QAD$.又 $CD\perp AB$,则 AC、AD 均为直径.从而 $\mathrm{Rt}\triangle PAC\backsim\mathrm{Rt}\triangle QAD$,故 $PC:QD=AC:AD$ 为定

值.

2.过 A 作 AB 的垂线交两圆于 P、Q,联结 BC、BP、BD、BQ.由于 $PQ\perp AB$,则 PB、QB 为直径,即有 $PB=QB$.又$\triangle CBD\backsim\triangle PBQ$,则$\triangle CBD$ 也是等腰三角形,即 CD 上的中线 BE 也是高,故 $CD\perp BE$.

3.若 PQ 与 CD 重合,则 $PQ=CD$.若 PQ 与 CD 不重合.联结 BP、BC、BQ、BD,由 $CD\perp AB$ 知 BC 为圆的直径,从而在 Rt$\triangle BPC$ 中,$PB<BC$.又$\triangle BPQ\backsim\triangle BCD$,则 $PQ:CD=PB:BC<1$,即 $PQ<CD$,故 $PQ\leqslant CD$.

4.联结 AF、AC、AD、AE,则$\triangle ACE\backsim\triangle AFD$.联结 FC,由 A、F、C、B 四点共圆,有$\angle AFC=\angle ABE=\angle ABD-\angle EBD=\angle ABC-\angle FBC=\angle ABF=\angle ACF$,从而$\triangle ACF$ 为等腰三角形,即有 $AF=AC$.此时$\triangle ACF\cong\triangle AFD$,故 $CE=FD$.

5.联结 KM,由$\angle DAM=\angle CBK$,知 A、B、M、K 四点共圆.于是,设 N 为 MB 延长线上一点,有$\angle MKA=\angle ABN=\angle DCM$,即知 M、C、D、K 四点共圆.因此 AD、BC 分别为过圆 $AKMK$ 与圆 $KMCD$ 的两交点 K、M 的割线.由相交两圆性质2的推论1,知$\triangle AMD\backsim\triangle BKC$,故$\angle DMA=\angle CKB$.

6.设 O 为弦 AB 的中点,联结 OM、OP、OQ,则 $OM\perp PQ$,于是 O、M、P、P' 四点共圆.同理,O、M、Q、Q' 四点共圆.PQ 与 $P'Q'$ 分别为过圆 $OMPP'$ 及圆 $OMQQ'$ 的两交点 M、O 的割线,由相交两圆性质2的推论1,知$\triangle P'MQ'\backsim\triangle POQ$.又由于弦 PQ 为定长,不论 PQ 滑到什么位置,所得$\triangle POQ$ 均为全等的等腰三角形,故$\triangle P'MQ'$ 的各角的大小不变.

7.联结 MP、MQ,则由四点共圆,有$\angle BRM=\angle APM$,$\angle CRM=\angle AQM$.又$\angle APM+\angle AQM=180^\circ$,则$\angle BRM+\angle CRM=180^\circ$,从而 B、R、C 三点共线.同理 B'、R'、C' 共线.

联结 AM、$A'M$、BM、$B'M$、CM、$C'M$,则由$\triangle ABM\backsim\triangle A'B'M$,$\triangle BCM\backsim\triangle B'C'M$,$\triangle ACM\backsim\triangle A'C'M$,即证.

第3章　1981年试题的诠释

这一年试题没有分一、二试,大题中平面几何试题2道,即第3、5题.

试题 A1　在圆 O 内,弦 CD 平行于弦 EF,且与直径 AB 交成45°角.若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q,且圆 O 的半径长为1,求证:$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$.

证法1　如图3.1,作 $OM\perp CD$,联结 OC,则 $CM=MD,PM=MO$.则

$$PC^2+PD^2=(CM-PM)^2+(MD+PM)^2=2(CM^2+PM^2)=2(CM^2+MO^2)=2CO^2=2$$

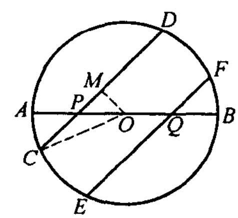


图3.1

同理　$$QE^2+QF^2=2$$

由　$$2PC\cdot QE\leqslant PC^2+QE^2,2PD\cdot QE\leqslant PD^2+QF^2$$

有　$$2(PC\cdot QE+PD\cdot QF)\leqslant PC^2+QE^2+PD^2+QF^2=(PC^2+PD^2)+(QE^2+QF^2)=4$$

即　$$PC\cdot QE+PD\cdot QF\leqslant 2$$

仅当 $PC=QE$ 及 $PD=QF$ 时,上式等号成立.

如等号成立,则 $PC\perp\!\!\!\!\!\!= QE$,$PD\perp\!\!\!\!\!\!= QF$,从而 $PCEQ$ 与 $PDFQ$ 都是平行四边形,即 $CE/\!/PQ/\!/DF$,且 $CDEF$ 是矩形,这与 CD、EF 与 AB 交成45°角矛盾,因此等号不能成立,即

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$$

证法2　如图3.2,过 O 作 CD、EF 的垂线,分别交 CD、EF 于 M、N,则

$$CM=MD,EN=NF,PM=MO,QN=NO$$

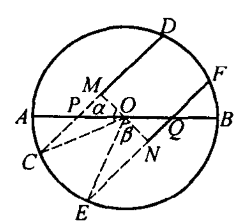


图3.2

令　$$\angle COM=\alpha,\angle EON=\beta$$

有　$$PC=CM-PM=CM-MO=\sin\alpha-\cos\alpha$$

$$QE=EN+QN=EN+NO=\sin\beta-\cos\beta$$

$$PC\cdot QE=\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$$

$$PD = MD + PM = CM + MO = \sin\alpha + \cos\alpha$$
$$QF = NF - QN = EN - NO = \sin\beta + \cos\beta$$
$$PD \cdot QF = \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

于是　$PC \cdot QE + PD \cdot QF = 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2\cos(\beta - \alpha) \leqslant 2$

仅当 $\beta = \alpha$ 时,上式等号成立,但当 $\beta = \alpha$ 时,E 与 C 重合,与题设不符,故等号不能成立,即

$$PC \cdot QE + PD \cdot QF < 2$$

证法 3　如图 3.3,联结 OC、OD、OE、OF,令 $\angle DCO = \angle CDO = \alpha$,$\angle FEO = \angle EFO = \beta$.则

$$\angle CPO = \angle FQO = 135^\circ, \angle OPD = \angle OQE = 45^\circ$$

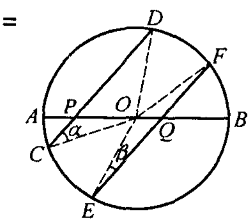


图 3.3

由正弦定理,有

$$PC = \frac{OC\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin 135^\circ} = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$$

$$PD = \frac{OD\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha)$$

同理　$EQ = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \beta)$,$QF = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta)$

于是 $PC \cdot QE + PD \cdot QF = 2[\sin(45^\circ - \alpha)\sin(45^\circ + \beta) + \sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \beta)] =$
$[\cos(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)] + [\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] =$
$2\cos(\alpha + \beta) \leqslant 2$

因 $\alpha + \beta \neq 180^\circ$,故

$$PC \cdot QE + PD \cdot QF < 2$$

证法 4　如图 3.4,设 $PC = x$,$AP = y$,$QF = z$,过 O 作 $OM \perp CD$ 于 M.则

$$PO = 1 - y, PM = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - y), PD = \sqrt{2} + x - \sqrt{2}y$$

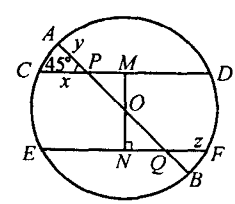


图 3.4

而　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$,$y(2 - y) = x(\sqrt{2} + x - \sqrt{2}y)$

$$y = \frac{\sqrt{2}x + 2 \pm \sqrt{4 - 2x^2}}{2}$$

因 $y \leqslant 1$,则只取 $y = \dfrac{\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{4 - 2x^2}}{2}$,即 $PD = \sqrt{2 - x^2}$.同理

$$QB=\frac{\sqrt{2}z+2-\sqrt{4-2z^2}}{2},EQ=\sqrt{2-z^2}$$

令 $$u=PC\cdot QE+PD\cdot QF,u=x\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{2-x^2}$$

化简得 $$2x^2-2u\sqrt{2-z^2}x+u^2-2z^2=0$$

因 x 是实数,则

$$\Delta=(-2u\sqrt{2-z^2})^2-4\cdot 2(u^2-2z^2)\geqslant 0$$

而 $z^2>0,u>0$,故 $u\leqslant 2$,而 $u=2$ 时 $AB\perp CD,AB\perp EF$ 不合题意,故

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$$

证法 5 如图 3.5,联结 OC、OE,令 $\angle HOC=\alpha$,$\angle HOE=\beta$. $C(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$D(-\cos\alpha,\sin\alpha)$、$E(\cos\beta,\sin\beta)$、$F(-\cos\beta,\sin\beta)$. 于是 $CD:y=\sin\alpha$,$EF:y=\sin\beta$,$PQ:y=x$.则

$$P(\sin\alpha,\sin\alpha),Q(\sin\beta,\sin\beta)$$

$$PC=\cos\alpha-\sin\alpha,PD=-\cos\alpha-\sin\alpha$$

$$QE=\cos\beta-\sin\beta,QF=-\cos\beta-\sin\beta$$

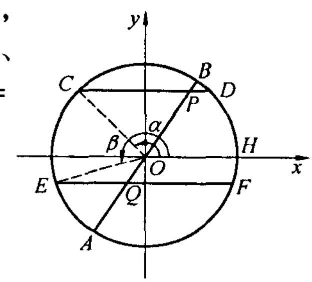


图 3.5

从而

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF=2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=2\cos(\alpha-\beta)$$

又 $\alpha\neq\beta$,故

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$$

证法 6 如图 3.6,以 O 为原点,与 CD 平行的直线为 x 轴建立直角坐标系,且设 $CD:y=a$,$EF:y=b$,则 $P(a,a)$、$Q(b,b)$,圆 $O:x^2+y^2=1$.

C、D 坐标为 $(-\sqrt{1-a^2},a)$、$(\sqrt{1-a^2},a)$;

E、F 坐标为 $(-\sqrt{1-b^2},b)$、$(\sqrt{1-b^2},b)$.

故

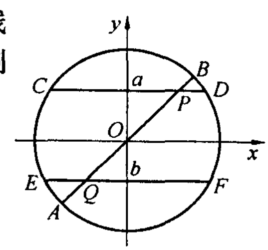


图 3.6

$$|CP|=a+\sqrt{1-a^2},|DP|=\sqrt{1-a^2}-a$$

$$|QE|=b+\sqrt{1-b^2},|QF|=\sqrt{1-b^2}-b$$

从而 $$|PC||QE|+|PD||QF|=2(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab)$$

但 $$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant \frac{(1-a^2)+(1-b^2)}{2} = \frac{1}{2}(2-a^2-b^2)$$

故上式右端小于等于 $2-(a^2+b-2ab)=2-(a-b)^2<2$.

注 (1)三角证法中,当 CD、EF 在 O 同一侧时,因 α、β 表示的角有所不同,CP、DP、EQ、FQ 的表示式有所改变,但结果一致.

(2)当 CD、EF 在 O 的两侧时,它们与 AB 交成 45°角的条件,可以不要.

事实上,如图 3.6,作 $OM \perp CD$ 于 M,作 $ON \perp EF$ 于 N.我们有

$$PC \cdot QE + PD \cdot QF = (MC+PM)(NF-QN)+(MC-PM)(NF+QN) =$$
$$2(MC \cdot NF - PM \cdot QN) < 2MC \cdot NF < 2$$

(3)当 CD、EF 在 O 的两侧,且 C、E 也在直径 AB 的两侧时,即图 3.7 中 E、F 位置互换时,有 $PC \cdot QE + PD \cdot QF \leqslant 2$,即等号可以取到.

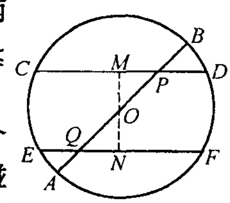


图 3.7

试题 A2 一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$,一个球从 AB 的中点 P 击出,击中 BC 边上的某点 Q,并且依次碰击 CD、DE、EF、FA 各边,最后击中 AB 边上的某一点.设 $\angle BPQ=\theta$,求 θ 的取值范围(提示:利用入射角等于反射角的原理).

解法 1 设球依次击中 CD、DE、EF、FA、AB 各边上的点 R、S、T、U、V.如图 3.8 所示,根据入射角等于反射角的原理 $\angle PQB=\angle RQC$,又 $\angle B=\angle C=120°$,因此

$$\triangle PQB \backsim \triangle RQC$$

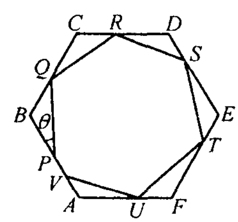


图 3.8

则 $$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}$$

同理可依次推得

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}=\frac{DS}{DR}=\frac{ES}{ET}=\frac{FU}{FT}=\frac{AU}{AV}$$

由等比定理得

$$\frac{BQ+CQ+DS+ES+FU+AU}{BP+CR+DR+ET+FT+AV}=\frac{BQ}{BP}$$

不失一般性,设正六边形的边长为 1,令 $AV=t$,则上式变为

$$\frac{3}{2.5+t}=\frac{BQ}{BP}$$

由正弦定理,得

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sqrt{3}\cot\theta-1}$$

则
$$\frac{3}{2.5+t}=\frac{2}{\sqrt{3}\cot\theta-1}$$

故
$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{8+2t}$$

由于 $0<t<1$,有

$$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\tan\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad (*)$$

因此,θ 取值范围是

$$\arctan\frac{3\sqrt{3}}{10}<\theta<\arctan\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

解法 2 如图 3.8,同解法 1,有

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}=\frac{DS}{DR}=\frac{ES}{ET}=\frac{FU}{FT}=\frac{AU}{AV}$$

不失一般性,设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1,$PB=\frac{1}{2}$,$BQ=x$,则

$$CQ=1-x,CR=\frac{1-x}{2x},DR=\frac{3x-1}{2x},DS=3x-1$$

$$ES=2-3x,ET=\frac{2-3x}{2x},FT=\frac{5x-2}{2x},FU=5x-2$$

$$AU=3-5x,AV=\frac{3-5x}{2x}$$

因 Q、R、S、T、U、V 各点均在正六边形的边上,可得不等式组

$$\begin{cases}0<x<1\\0<\frac{1-x}{2x}<1\\0<3x-1<1\\0<\frac{2-3x}{2x}<1\\0<5x-2<1\\0<\frac{3-5x}{2x}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\\frac{1}{3}<x<1\\\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\\\frac{2}{5}<x<\frac{2}{3}\\\frac{2}{5}<x<\frac{3}{5}\\\frac{3}{7}<x<\frac{3}{5}\end{cases}$$

故
$$\frac{3}{7}<x<\frac{3}{5}$$

在$\triangle PBQ$中，$BP=\frac{1}{2}$，$\angle PBQ=120°$，$\frac{3}{7}<BQ<\frac{3}{5}$，由余弦定理可得$PQ$的范围为
$$\frac{\sqrt{127}}{14}<PQ<\frac{\sqrt{91}}{10}$$
由正弦定理即得$\angle QPB$的范围
$$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}}<\theta<\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

解法3　利用线性函数迭代法.

(1)如图3.9，设
$$QC=y,BQ=1-y,DR=z$$
在$\triangle PBQ$中用正弦定理
$$\frac{x}{\sin(60°-\theta)}=\frac{1-y}{\sin\theta} \qquad ①$$
同理在$\triangle QCR$中用正弦定理
$$\frac{y}{\sin\theta}=\frac{1-z}{\sin(60°-\theta)} \qquad ②$$

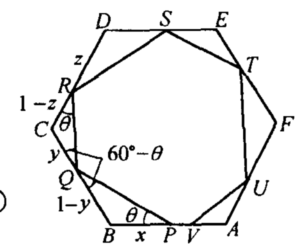


图3.9

①、②中消去y，得
$$x=\frac{\sin(60°-\theta)-\sin\theta}{\sin\theta}+z$$
从而
$$z=x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta$$
设
$$f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta$$
依次推下去则BV为$f(x)$的三阶复合函数，故
$$BV=f^{(3)}(x)=x+\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{3}\cot\theta \qquad ③$$

(2)由$0<BV<1$知当$BV=x=\frac{1}{2}$时
$$BV=5-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cot\theta$$
$$0<5-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cot\theta<1$$

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}<\cot\theta<\frac{10}{3\sqrt{3}}\Rightarrow 20°30'<\theta<30°$$

解③,当 $x=\frac{1}{4}$,$\theta=30°$时,代入式③得

$$BV=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cot 30°=\frac{1}{4}$$

此时 BV 在 AB 边上且与 P 重合.

解法 4 如图 3.10,再作正六边形 $DCD'E'F''E''$,正六边形 $E'F'A'\cdots F''$,….

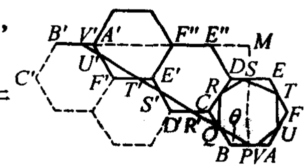


图 3.10

延长 PQ 分别交 CD'、$D'E'$、$E'F'$、$F'A'$、$A'B'$ 于 R'、S'、T'、U'、V' 各点.

设球击在 CD、DE、EF、FA、AB 各边的点分别是 R、S、T、U、V,由于入射角等于反射角,易证

$$\triangle QCR'\cong\triangle QCR,\triangle R'D'S'\cong\triangle RDS,\triangle S'E'T'\cong\triangle SET$$

$$\triangle T'F'U'\cong\triangle TFU,\triangle U'A'V'\cong\triangle UAV$$

球击中 CD 上点 R 相当于球击中 CD' 上点 R';击中 DE 上点 S 相当于击中 $D'E'$ 上点 S',依此类推.

因此,球行走的折线 $PQRSTUV$ 转化为直线 $PQR'S'T'U'V'$.

易证 B'、A'、F''、E''共线,设这一直线与 AB 的中垂线相交于 M,则有

$$B'M\parallel BA,B'M\perp MP$$

易证 B、D'、F'、B'共线与 A、C、E'、A'共线.

因为 $B'A'\underline{\parallel}BA$,所以 $BB'A'A$ 是平行四边形.

若 PQ 延长后能与平行四边形内的线段 CD'、$D'E'$、$E'F'$、$F'A'$相交,并与 $A'B'$相交,则线段 PV'应在平行四边形 $BB'A'A$ 的内部.因此,必将有

$$\angle PB'M<\angle PV'M=\angle BPQ=\theta<\angle PA'M$$

不失一般性,设正六边形边长为 1,则

$$B'M=5,A'M=4,PM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\angle PB'M=\frac{MP}{B'M}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times 5}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$$

$$\tan\angle PA'M=\frac{MP}{A'M}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times 4}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

由(*)式有$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\tan\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8}$,因此,$\theta$ 取值范围是

$$\arctan\frac{3\sqrt{3}}{10}<\theta<\arctan\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

解法 5　如图 3.11,将正六边形 $ABCDEF$(简称图 A_0)以 BC 为对称轴反射,得图 A_1;再将正六边形 A_1 以 CD_1 为对称轴反射,得图 A_2;如此,依次得 A_3、A_4、A_5 各正六边形.显然 B、D_1、F_1、B_1 以及 A、C、E_1、A_1 各点分别在一条直线上,且 ABB_1A_1 为平行四边形.又因为入射角等于反射角,所以从 AB 的中点 P 击出,依次碰到 A_0 的各边反射,最后击中 AB 边上的一点,这样情况下球 P 所经过的折线轨迹,由对称性可得如图 3.10 所形成的在平行四边形 ABB_1A_1 内始点在 P,终点在 A_1B_1 上的直线段.

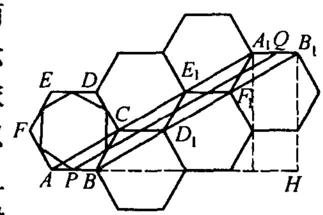


图 3.11

从而$\angle BPQ$ 的范围为$\angle BPB_1<\angle BPQ<\angle BPA_1$.

由 $AB=1$,$BP=\frac{1}{2}$,$B_1H=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$BB_1=3\sqrt{3}$,$PH=5$,可以解得

$$\angle BPB_1=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}},\angle BPA_1=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

故

$$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}}<\theta<\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

注　本题可以推广到正 n 边形的情形.

第 1 节　反射变换

所谓反射,就是把一个图形 F 变为它关于直线 l 的轴对称图形 F',这样的变换称为关于直线 l 的反射,直线 l 叫做反射轴.

反射由反射轴完全确定,经过反射保持不变的点或线称为二重点或二重线.显然,反射轴上的点是二重点,对应点的连线(即垂直于反射轴的直线)和反射轴都是二重线.

反射是合同变换,在反射下,射线变为射线,平行线变为平行线,三角形、多边形和圆分别变为与它们全等的三角形、多边形和圆.也就是说,在反射变换

下,结合性、平行性保持不变,两点间的距离、弧长、角度、面积等都是反射下的不变量.

我们利用反射的不变性质和不变量来解一些问题,有其独特的作用.

例1 已知 AD 是凸五边形 $ABCDE$ 的一条对角线,且 $\angle EAD > \angle ADC$, $\angle EDA > \angle DAB$,求证:$AE + ED > AB + BC + CD$.

(1979年甘肃省竞赛试题)

分析 如图3.12,折线 $ABCD$ 与折线 AED 在 AD 的两侧,如能变到同一侧,就易于比较了,于是可将折线 $ABCD$ 以 AD 为反射轴变换成 $AB'C'D$. 但由题设条件 $\angle EAD > \angle ADC$, $\angle EDA > \angle DAB$,知折线 $AB'C'D$ 未必全落在 $\triangle AED$ 内,仍难以比较,所以还需以 AD 的垂直平分线作反射轴,将折线 AED 反射成 $DE'A$,从而

$$\angle E'DA = \angle EAD > \angle ADC, \angle E'AD = \angle EDA > \angle DAB$$

这样 $AB'C'D$ 在 $\triangle AE'D$ 内部,若延长 AB' 交 DE' 于 P,延长 $B'C'$ 交 DE' 于 Q,则有

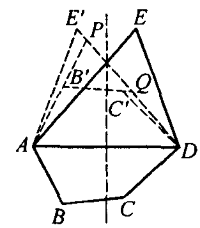


图3.12

$$AE + ED = AE' + E'D > AP + PD > AB' + B'Q + QD > AB' + B'C' + C'D = AB + BC + CD\text{(证略)}$$

注 本题可进行推广:在任意凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中,若

$$\angle A_1A_2A_n > \angle A_2A_nA_{n-1}, \angle A_1A_nA_2 > \angle A_3A_2A_n$$

则有

$$A_1A_2 + A_1A_n > \sum_{i=2}^{n-1} A_iA_{i+1}$$

证法相仿.

例2 已知矩形 $ABCD$, E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 上的点,求证:$EF + FG + GH + HE \geqslant 2AC$.

(1984年浙江舟山市竞赛题)

证明 将矩形 $ABCD$ 沿 CD 反射成 A_1B_1CD,将 A_1B_1CD 沿 CB_1 反射成 $A_2B_1CD_1$,将 $A_2B_1CD_1$ 沿 A_2B_1 反射成 $A_2B_1C_1D_2$ 如图3.13. E、F、G、H 各点的像见图3.13所示. 易知 A、C、A_2 共线,则 $AA_2 = 2AC$. 又由反射性质知

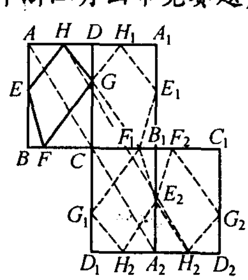


图3.13

$$HG + GF_1 + F_1E_2 + E_2H_3 = HG + GF + EF + HE$$

及
$$AH = A_2H_3, AH /\!/ A_2H_3$$

则
$$AA_2 = HH_3$$

但
$$HG + GF_1 + F_1E_2 + E_2H_3 \geqslant HH_3$$

故 $$EF+FG+GH+HE\geqslant 2AC$$

由上面证明可知当且仅当 H、G、F_1、E_2、H_3 五点共线时，即当且仅当 $EF /\!/ GH /\!/ AC$，$EH /\!/ FG /\!/ BD$ 时，不等式取等号.

例3　锐角三角形中，所有内接三角形以垂足三角形的周长最短.

分析1　考虑到这个题目要求证明某特定条件下的折线段长度为最短，因而可利用反射变换将其转化成一直线段，然后再同无此特定条件的一般折线段进行比较. 如图3.14，$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，将锐角 $\triangle ABC$ 经过连续五次反射变换后，形成六个相邻的全等三角形，最后一个为 $\triangle A_2B_2C_1$，其余字母见图示. 由 B、D、H、F，D、C、E、H 及 B、C、E、F 分别共圆，可证得 $\angle FDA=\angle EDA$，由反射性质知 A、D、A_1 共线，$\angle E_1DA_1=\angle EDA$，则 $\angle E_1DA_1=\angle FDA$，故 F、D、E_1 共线. 同理知 F、D、E_1、F_2、D_2、E_3、F_4 共线. 从而 $FE_4=2(DE+EF+FD)$，又由反射性质 $\angle A_2F_4E_3=\angle AFE$，又由 $\angle AFE=\angle BFD$，则 $\angle BFD=\angle A_2F_4E_3$，故 $AB /\!/ A_2B_2$. 而对任意内接 $\triangle PQR$，其中 P、Q、R 不全为高线的垂足，则经五次反射变换后转化成折线段 $RPQ_1R_2P_2Q_3R_4$，显然其长度大于 RR_4. 但 $FR=F_4R_4$，则 FF_4R_4R 为平行四边形，即 $RR_4=FF_4$. 故 $\triangle DEF$ 的周长小于 $\triangle POR$ 的周长.（证略）

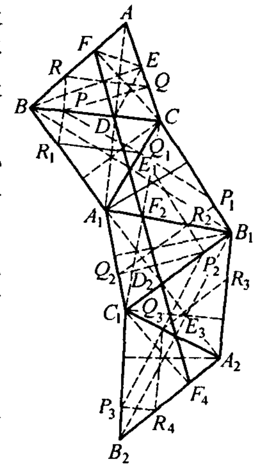


图3.14

分析2　如图3.15，作点 D 关于 AB、AC 的反射点 D_2、D_1. 设内接三角形只有顶点 D 为垂足，记 $\angle BAC=\angle A$，则

$$DE'+E'F'+F'D=D_1E'+E'F'+F'D_2>D_1D_2=D_1E+EF+FD_2=$$
$$DE+EF+FD=2E_1F_1=2AD\sin A$$

当内接三角形三个顶点均不为垂足时，如图3.16所示. 此时

$$D'E'+E'F'+F'D'=D'_1D'_2=2E_0F_0=2AD'\sin A>2AD\sin A=DE+EF+FD$$

（证略）

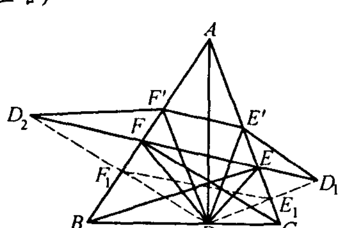


图3.15

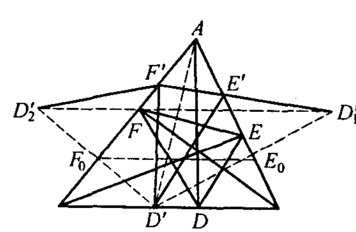


图3.16

例4　两个正三角形内接于一个半径为 r 的圆，记其公共部分的面积为 S，求证：$2S\geqslant\sqrt{3}r^2$.

(1985年第26届IMO预选题)

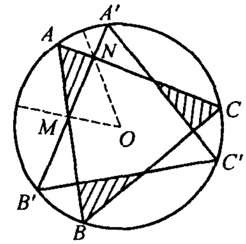


图3.17

证明 如图3.17,设$A'B'$分别交AB、AC于M、N,则整个图形关于OM、ON分别成轴反射图形.故$AM=B'M$,$AN=A'N$,那么

$$AM+MN+NA=A'B'=\sqrt{3}r$$

即$\triangle AMN$的周长为定长.因此

$$S_{\triangle AMN}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{12}r^2$$

于是
$$S=S_{\triangle ABC}-3S_{\triangle AMN}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

即
$$2S\geqslant\sqrt{3}r^2$$

例5 已知:点E和G分别是凸四边形$ABCD$的边AB、CD的中点,矩形$EFGH$满足顶点F、H分别在边BC、AD上.求证:四边形$ABCD$的面积是矩形$EFGH$的面积的两倍.

分析 如图3.18,只要能证明沿矩形的边把四边形$ABCD$在矩形外面的部分(阴影部分)反射到矩形内部后,恰能填满矩形,既没有空隙又不相重叠就可以了.

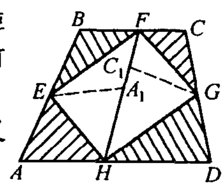


图3.18

证明 因为E是AB的中点,所以$EA=EB$,又$\angle FEH=90°$,所以

$$\angle AEH+\angle BEF=\angle FEH$$

于是将四边形$ABCD$位于矩形外部的部分反射到其内部后,EB与EA重合于EA_1,同理,GC与GD重合于GC_1.又

$$\angle AHE+\angle DHG=\angle EHG$$

所以HA_1与HC_1在一条直线上.

同理FC_1与FA_1也在一条直线上.

若A_1与C_1重合于一点,于是反射后恰好填满.

若A_1与C_1不重合于一点,则A_1,C_1都在直线FH上,从而也恰好填满.

所以命题得证.

例6 已知一个正六边形内接于一个圆,另一个正六边形外切此圆.不直接计算两个六边形的面积,试求这两个正六边形面积之比是多少?

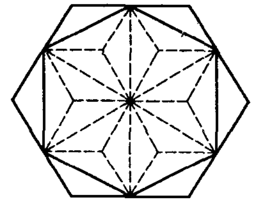


图3.19

解 如图3.19,将内接正六边形的顶点恰好放在外切正六边形的各边中点上.联结中心与内接正六边形的

各顶点得六个等边三角形，再将外切正六边形位于内接正六边形外面的部分反射到其内部，易知各顶点的对称点是六个等边三角形的中心. 于是我们得到构成外切正六边形的24个全等三角形，其中18个构成内接正六边形，所以内接正六边形与外切正六边形的面积之比为 $18:24=3:4$.

练 习 题

1. 已知 BD 为等腰 $\triangle ABC$ 的底角 $\angle B$ 的平分线，且 $AB=BC+CD$. 求证：$\angle C=90°$.

2. 已知 $\angle ABD=\angle ACD=60°$，$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

（1990年武汉市初二数学竞赛题）

3. 凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O，且 $AC\perp BD$. 已知 $OA>OC$，$OB>OD$，求证：$BC+AD>AB+CD$.

（首届“祖冲之杯”初中数学邀请赛试题）

4. AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，过 DC 上任意一点 F 作 $FG/\!/AB$ 与 AC 和 AD 的延长线分别交于 G 和 E，$FH/\!/AC$ 交 AB 于 H. 求证：$HG=BE$.

（四川省1989年初中数学联合竞赛题）

5. 点 P、Q、R 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上，且 $BP=PQ=QR=RC=1$. 那么 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

（1990年全国初中数学联赛试题）

6. 已知：D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点，$AD:DC=2:1$，$\angle C=45°$，$\angle ADB=60°$，求证：AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

（1987年全国初中数学联赛第二试试题）

7. 在等边 $\triangle ABC$ 内有一点 P，若 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$（单位：cm），则此三角形的面积是________（cm^2）.

（1990年全国初中生“勤奋杯”数学邀请赛试题）

练 习 题 解 答

1. 如图，以 BD 为反射轴，作 $\triangle BCD\cong\triangle BED$. 因

$$AB = BC + CD = BE + DE$$

则 $$AE = DE$$

即 $$\angle A = \angle EDA, \angle C - \angle DEB = 2\angle A$$

在等腰△ABC 中,$\angle A = \angle ABC$,则$\angle A = 45°$,则$\angle C = 90°$.

2. 如图,由$\angle ADB = 90° - \frac{1}{2}\angle BDC$,得$\angle ADC = 90° + \frac{1}{2}\angle BDC$,以 AD 为反射轴,作△$ACD \cong$ △AED,则

$$AC = AE, \angle ADE = \angle ADC, \angle ADE + \angle ADB = 180°$$

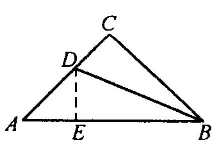
因此,B、D、E 在一直线上,得出△ABE 是等边三角形. 故 $AB = AE = AC$.

3. 如图,注意到 $AC \perp BD$. 于是分别以 BD、AC 为对称轴作出 BC、AD 的对称图形 BC'、AD',显然点 C'、D' 各在 AO、BO 上. 联结 $C'D'$,则 $C'D' = CD$. 如图,易知

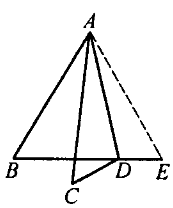
$$AE + BE > AB, C'E + D'E > C'D'$$

将上两式相加得 $$BC' + AD' > AB + C'D'$$

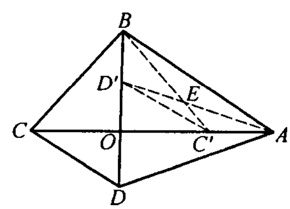
即 $$BC + AD > AB + CD$$



第 1 题



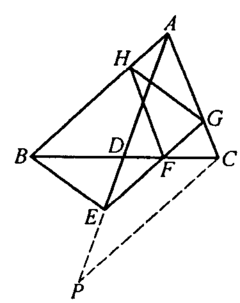
第 2 题



第 3 题

4. 如图,以 D 为对称中心作出△ADB 的中心对称图形△PDC. 显然 DP 和 DE 重合. 且 $PC /\!/ AB$. 由 $EG /\!/ AB$ 得 $PC /\!/ EG$. 这时$\frac{EG}{PC} = \frac{AC}{AC}$.

但 $FGAH$ 是平行四边形,所以 $HF \perp\!\!\!\!\!\!= AG$,于是$\frac{AG}{AC} = \frac{HF}{AC} = \frac{BH}{AB}$,即得$\frac{EG}{PC} = \frac{BH}{AB}$. 由此 $EG = BH$,这时 $EGHB$ 为平行四边形,故 $HG = BE$.



第 4 题

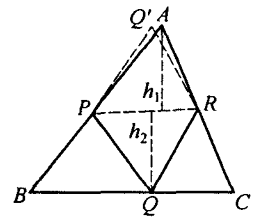
5. 如图,联结 PR,以 PR 为对称轴作出△PQR 的对称△$PQ'R$,这时易知 Q',A 都在以 PR 为弦的含$\angle A$ 的弓形弧上. 由 $PQ' = Q'R$ 知 Q'是这弧的中点. 设以 PR 为公共底边的△PQR 及△APR 的高为 h_2 及 h_1,

就易知 $h_1 \leqslant h_2$，但$\triangle BPQ$、$\triangle QRC$、$\triangle PQR$ 的面积均不大于$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，从而

$$S_{\triangle APR}\leqslant S_{\triangle PQR}\leqslant \frac{1}{2}$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APR}+S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle QRC}+S_{\triangle PQR}\leqslant 4\times\frac{1}{2}=2$$



第 5 题

最后，当 $AB=AC=2$，$\angle A=90°$时，$S_{\triangle ABC}=2$ 即可以达到最大值，故选 B.

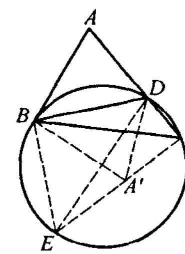
6. 如图，以 BD 为对称轴作出$\triangle ABD$ 的对称图形$\triangle A'BD$，联结 CA'并延长交圆 O 于 E，联结 BE、DE，则$\angle A'DC=60°$. 由余弦定理

$$A'C^2=A'D^2+DC^2-2A'D\cdot DC\cos 60°=A'D^2-DC^2$$

所以 $$A'D^2=A'C^2+DC^2,\angle DCA'=90°$$

那么 DE 为圆 O 的直径，从而

$$\angle BDE=\angle BCE=45°=\angle BCD=\angle BED$$



第 6 题

于是 $BD=BE$，又

$$\angle EDA'=\angle BDA'-\angle BDE=15°=\angle DBC=\angle DEA'$$

于是 $A'D=A'E$.

综上可得 $A'B$ 是 DE 的垂直平分线，由此，它必过圆心 O. 且$\angle A'BD=45°$，$\angle ABA'=90°$. 故 AB 是圆 O 的切线.

7. 如图，分别以 AB、BC、AC 为对称轴作出$\triangle APB$、$\triangle BPC$、$\triangle APC$ 的对称图形$\triangle AP_1B$、$\triangle BP_2C$，$\triangle AP_3C$. 联结 P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1，则

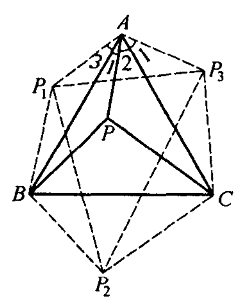
$$AP_1=AP_3=AP=3,BP_1=BP_2=BP=4$$

$$CP_2=CP_3=CP=5,\angle 1=\angle 3,\angle 2=\angle 4$$

而$\angle 1+\angle 2=60°$，由此$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=120°$.

即$\angle P_1AP_3=120°$. 在$\triangle P_1AP_3$ 中

$$P_1P_3=\sqrt{3^2+3^2-2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos 120°}=3\sqrt{3}$$



第 7 题

同理可得 $P_1P_2=4\sqrt{3}$，$P_2P_3=5\sqrt{3}$.

由海伦公式，求得 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=18$，又

$$S_{\triangle AP_1P_3}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2$$

同理 $S_{\triangle BP_2P_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2, S_{\triangle CP_2P_3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 5^2$

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(S_{\triangle P_1P_2P_3}+S_{\triangle AP_1P_3}+S_{\triangle BP_2P_1}+S_{\triangle CP_2P_3})$

附录:平面对称图形的有关性质[①]

定义 1 设平面图形 F,如果存在一条直线 l,使 F 中任意一点关于 l 的对称点都在 F 上,那么称 F 是以 l 为对称轴的对称图形.

定义 2 设平面图形 F,如果存在一点 O,使 F 中任意一点关于 O 的对称点都在 F 上,那么称 F 是以 O 为对称中心的中心对称图形.

根据定义,容易得出如下性质.

性质 1 如果 F 有两条对称轴,那么其中一条对称轴关于另一条对称轴的对称直线仍是 F 的对称轴.

推论 1 如果平面图形有且只有两条对称轴,那么这两条对称轴互相垂直.

性质 2 如果 F 有两个对称中心,那么其中一个对称中心关于另一个对称中心的对称点仍是 F 的对称中心.

推论 2 一个平面图形不能恰好有两个对称中心.

性质 3 如果 F 有一条对称轴及一个对称中心,那么对称轴关于对称中心的对称直线(或对称中心关于对称轴的对称点)仍是 F 的对称轴(或对称中心).

推论 3 一个平面图形不能恰好有一条对称轴及一个对称中心.

性质 4 如果 F 存在两条互相垂直的对称轴,那么 F 是以垂足为对称中心的对称图形.

性质 5 如果 F 有且只有 $n(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N})$条对称轴,那么这些对称轴相交于一点,且夹角都是$\frac{180^\circ}{n}$.

为了证明这条性质,先来证明一条引理.

引理 在平面上给出有限条两两不平行的直线,并且每个交点处至少有三条直线,则这些直线都交于一点.

证明 假设所有的直线不交于同一点,我们考虑直线的交点,选取由这些

① 苗湘军.平面对称图形的性质[J].中学生数学,1994(9):21-22.

点到直线的最小非零距离. 如图1所示, 设由点 A 到直线 l 的距离是最小的. 通过点 A 至少有3条直线, 设它们与直线 l 分别交于 B、C、D. 由点 A 向直线 l 作垂线 AQ. 点 B、C、D 中的某两个点必位于 Q 的同一侧, 例如 C 和 D. 不妨设 $CQ < DQ$, 于是, 由点 C 到直线 AD 的距离小于由点 A 到直线 l 的距离, 这与 A 和 l 的选取矛盾, 所以引理得证.

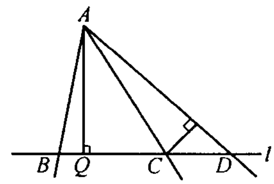


图1

下面证明性质5.

证明　因为 F 有有限条对称轴, 由性质1得这些对称轴两两不平行.

若这些对称轴所构成的三角形中有直角三角形. 由性质4得, 直角顶点是 F 的对称中心, 而对称中心不在斜边这条对称轴上, 再由性质3得, F 必有无数条与斜边平行的对称轴, 这与已知矛盾.

若这些对称轴所构成的三角形中没有直角三角形, 由性质1得, 对称轴的每个交点处都至少有三条对称轴, 再由引理得这些对称轴交于一点.

由于 n 条对称轴相交于一点, 这时记它们依次为 l_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 若它们依次夹角不相等, 不妨设 l_1 与 l_2 的夹角 α 和 l_2 与 l_3 的夹角 β 不相等 $(\alpha<\beta)$. 作 l_1 关于 l_2 的对称直线 l_i, 这时对称轴 l_i 位于 l_2 与 l_3 之间, 如图2所示. 这与对称轴的记法矛盾. 所以对称轴依次夹角相等, 且都是 $\frac{180°}{n}$.

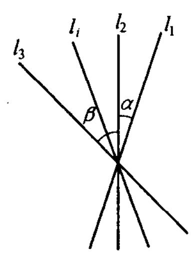


图2

性质6　如果 F 有且只有偶数条对称轴, 那么 F 是中心对称图形.

证明　由性质5得, 这偶数条对称轴相交于一点且依次夹角为 $\frac{180°}{2n}$. 设对称轴依次为 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $\frac{180°}{2n}\times n=90°$, 于是 $l_1\perp l_{n+1}$, 再由性质4, 得 F 是中心对称图形.

性质7　如果 F 有且只有奇数条对称轴, 那么 F 不是中心对称图形.

证明　由性质5得, 这奇数条对称轴相交于一点(设为 O), 易知这些对称轴中没有互相垂直的.

假设 F 是中心对称图形, 由性质3得, 交点 O 就是对称中心(否则 F 的对称轴有无数条). 过 O 作某一对称轴的垂线 l, 根据定义, l 也是 F 的对称轴, 这与已有结论矛盾. 所以 F 不是中心对称图形.

性质8 如果有界图形 F 至少有两条对称轴,那么这些对称轴相交于一点.

证明 若 F 有有限条对称轴,由性质5,结论成立.

若 F 有无限条对称轴,由性质1,这无限条对称轴两两不平行.我们考虑对称轴 l_1、l_2、l_3 构成的 $\triangle ABC$,取 $\triangle ABC$ 内一点 M,如图3所示.设有界图形 F 上一点 N 到 M 距离最远.不妨设 M、N 在 l_1 的同侧.作 N 关于 l_1 的对称点 N'.这时 F 上的点 N' 满足 $MN < MN'$.这与 N 的选取矛盾.所以这无限条对称轴也相交于一点.所以结论成立.

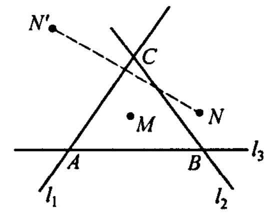


图3

第2节 球台上的数学[①②]

1.长方形的球台

在长方形球台长边的中点上放一个台球,若将球向短边的中点撞去,则球不仅碰撞另外三边反弹回原地,而且球在运动过程中,若不考虑能量的损失,则台球会始终按同样的路线循环运动,如图3.20所示.

若将台球放在长方形球台边上的任意一点,撞球的方向平行于对角线,则球也会撞上另外三边返回原地,如图3.21所示.当然,台球不一定要放在桌边上,只要保证撞球的方向平行于任一对角线便可使台球返回原地.

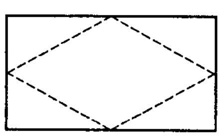


图3.20

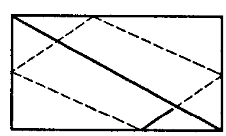


图3.21

2.任意凸四边形的球台

假如球台的形状是任意的凸四边形,若将台球放在一边上,并将台球向另一边撞出,碰撞另外三边而反弹回原位,则应该如何撞击台球呢?

将台球碰出后撞到边再反弹出来,则入射角和反射角一定相等,如图3.22

① 王定国.球台上的数学[J].中学数学研究,1982(5):35-36.
② 周文国,李秀兰.从台球运动看数学[J].中学生数学,2003(11):32.

所示.

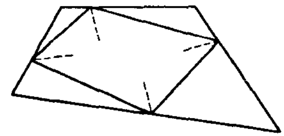


图 3.22

如图 3.23 中,若将球台标为四边形 $ABCD$,球放在点 M,现在要把球撞出,使台球依次碰撞了 AB、BC、CD 后再反弹到原来的位置,我们可以用对折的办法来找出台球撞击的方向.将四边形 $ABCD$ 沿着 AB 对折,作出相邻的四边形 $ABC'D'$,再把四边形 $ABC'D'$ 沿着 BC' 对折,作出相邻的四边形 $A'BC'D''$,再将四边形 $A'BC'D''$ 对折,作出相邻的四边形 $A''B'C'D''$,则原四边形 $ABCD$ 的点 M 变成了点 M'',则 MM'' 是撞击台球的方面.

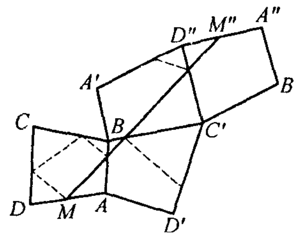


图 3.23

若设四边形 $ABCD$ 的四个角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$.将 AD 按顺时针方向旋转 $\angle A$ 到 AB 位置,将 BA 逆时针方向旋转 $\angle B$ 到达 BC' 的位置,将 $C'B$ 又按顺时针方向旋转 $\angle C$ 到 $C'D''$,将 $D''C'$ 再逆时针方向旋转 $\angle D$ 到 $D''A''$,则 $A''D''$ 便由 AD 旋转了 $\angle A-\angle B+\angle C-\angle D$ 而得到,若 $\angle A-\angle B+\angle C-\angle D=0$,因此可知 $A''D''/\!/AD$,故 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$,四边形 $ABCD$ 内接于圆.所以,对任意凸四边形的球台来说,要保证台球能够按同一线路循环碰撞,首先需要的是球台为圆内接四边形,同时要将球放在适当的位置.

3.对任意锐角三角形的球台

如图 3.24,$\triangle ABC$ 为三角形的球台,若将台球由点 F 撞向点 D,使台球能够按相同的路线往复循环,往返于 F、D、E 三点之间,其中 O 为 $\triangle DEF$ 的内心,我们从入射角和反射角相等的原理出发知 $OF\perp BC$,$OD\perp AC$,$OE\perp AB$,且 C、D、O、F 四点共圆;同样可知 A、D、O、E 及 B、F、O、E 四点共圆.因此

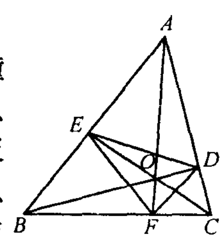


图 3.24

$$\angle COE=\angle COD+\angle DOA+\angle AOE$$

又 $$\angle COD=\angle CFD,\angle DOA=\angle DEA,\angle AOE=\angle ADE$$

又 $$\angle CFO=\angle AEO=\angle ADO=90°$$

则 $$\angle COD=90°-\angle OFD,\angle DOA=90°-\angle OED$$

$$\angle AOE=90°-\angle EDO$$

又点 O 是 $\triangle DEF$ 的内心,则

$$\angle OFD+\angle OED+\angle EDO=90°$$

即
$$\angle COD+\angle DOA+\angle AOE=180^\circ$$

故 C、O、E 共线,A、O、F 与 B、O、D 均共线.故点 O 为$\triangle ABC$ 的垂心.

故对于一个任意锐角三角形的球台,只要在三角形中作出三条边上的高,由一个高的垂足向另外的高的垂足撞球,球不按同一线路不断反弹.

例 台球桌的形状是三角形的,这三角形的内角之比是有理数.用台球杆撞击位于台球桌内某点的台球,台球按“反射角等于入射角”的规律由台球桌旁反射出来.求证:台球只可能沿有限多个方向运动(假定台球不落在台球桌外).

(波兰数学奥林匹克,1970 年)

证明 首先证明,当台球先由$\triangle ABC$ 的边 AC 反射出来,再由边 AB 反射,则台球运动方向偏转的角度等于 $2\angle BAC$.

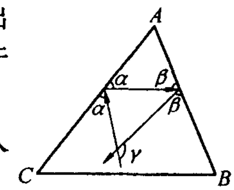


图 3.25

如图 3.25,设台球入射边 AC 的方向与边 AC 成 α 角,入射边 AB 的方向与边 AB 成 β 角,偏转角度为 γ,则
$$\gamma=(180^\circ-2\alpha)+(180^\circ-2\beta)=2(180^\circ-\alpha-\beta)=2\angle BAC$$

由于已知$\triangle ABC$ 的内角之比是有理数,所以存在数 λ 及自然数 r、s、t 适合
$$\angle BAC=\lambda r,\angle ABC=\lambda s,\angle ACB=\lambda t$$

于是由三角形内角和定理得
$$\lambda(r+s+t)=\pi$$

记 $n=r+s+t$,则 $\lambda=\frac{\pi}{n}$,n 为自然数.

若台球经过偶数次反射后,其运动方向偏转的角度等于$\frac{\pi}{n}$的偶数倍,即等于下列各数之一,即
$$2\lambda,4\lambda,6\lambda,\cdots,2n\lambda=2\pi$$

因此,台球经过偶数次反射后的运动方向有 n 种可能,类似地,台球经过奇数次反射后的运动方向也有 n 种可能.

于是,台球可能运动方向不超过 $2n$ 种.

第4章　1982年试题的诠释

这一年试题没有分一、二试，大题中平面几何试题2道，即第3、4题.

试题A1　已知：(1)半圆的直径 AB 长为 $2r$；(2)半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直，垂足为 T，$|AT|=2a\left(2a<\frac{r}{2}\right)$；(3)半圆上有相异两点 M、N，它们与直线 l 的距离 $|MP|$、$|NQ|$ 满足条件 $\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1$. 求证：$|AM|+|AN|=|AB|$.

证法1　如图4.1，根据题意作 $MC\perp AB$，$ND\perp AB$，C、D 为垂足. 在 $Rt\triangle AMB$ 中，$AM^2=AC\cdot AB$，在 $Rt\triangle ANB$ 中，$AN^2=AD\cdot AB$. 则

$$AN^2-AM^2=(AD-AC)\cdot AB$$

即　$$(AN+AM)(AN-AM)=(AD-AC)\cdot AB$$

但 $AN-AM=QN-PM=TD-TC=CD=AD-AC$

故　$$AN+AM=AB$$

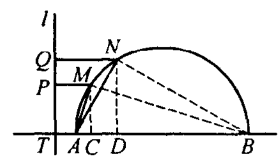


图4.1

证法2　因 $AM=MP$，$AN=NQ$，则只须证明

$$MP+NQ=AB$$

现设 R、S、C 分别是 PQ、MN、AB 中点，如图4.2所示. 联结 RS、SC，则

$$MP+NQ=2RS$$

故只须证明 $RS=AC=\frac{AB}{2}$ 即可.

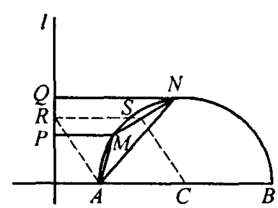


图4.2

为此只须证明 $RSCA$ 为平行四边形，或证明 $RA\parallel SC$ 即可.

以 M 为圆心，$MP=MA$ 为半径，作圆 M，以 N 为圆心，$NQ=NA$ 为半径作圆 N，则此二圆切 l 于 P、Q，并设交于 A'.

因 AA' 是二圆公共弦，而 $AA'\perp MN$，则 $AA'\parallel SC$. 因此只须证明 AA' 延长交 l 为 R 即可.

为此,设 AA' 延长交 l 于 R'. 于是

$$PR'^2 = R'A \cdot R'A' = QR'^2$$

从而 $PR' = QR'$,故 $R' \equiv R$,即 R 在直线 AA' 上,故 $RA /\!/ SC$. 证毕.

证法 3　如图 4.3,设 $\angle MAB = \beta$, $\angle NAB = \alpha$,联结 BN、BM, $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$,所以

$$|AM| = 2r\cos\beta, |AN| = 2r\cos\alpha$$

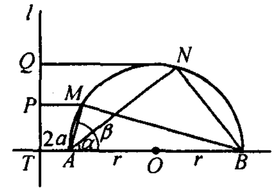


图 4.3

得

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad ①$$

又

$$|MA| = |MP| = 2a + |AM|\cos\beta \quad ②$$

$$|NA| = |NQ| = 2a + |AN|\cos\alpha \quad ③$$

② - ③得

$$|MA| - |NA| = |AM|\cos\beta - |AN|\cos\alpha$$

从而

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\beta - 1} \quad ④$$

由①、④得

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\beta - 1}$$

亦即

$$(\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = \cos\alpha - \cos\beta$$

又 $\alpha \neq \beta$,则 $\cos\alpha - \cos\beta \neq 0$($M$、$N$ 为相异二点). 故

$$\cos\alpha + \cos\beta = 1$$

因此

$$|AM| + |AN| = 2r(\cos\alpha + \cos\beta) = 2r = |AB|$$

证法 4　依题意作出图形,取 AT 中点 O 为坐标原点,以有向直线 TA 为 x 轴建立平面直角坐标系,如图 4.4 所示.

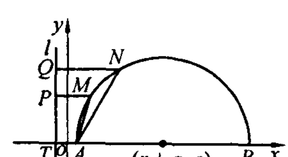


图 4.4

设点 M、N 的横坐标分别为 x_1、x_2,圆的方程为

$$[x - (r + a)]^2 + y^2 = r^2$$

抛物线方程为

$$y^2 = 4ax$$

由题设可知 M、N 均为抛物线与圆的交点. 由

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ (x - r - a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

得 $$x^2+(2a-2r)x+2ra+a^2=0$$

则 $$x_1+x_2=2r-2a$$

因 $$|AM|=|PM|=x_1+a,|AN|=|QN|=x_2+a$$

又 $$|AB|=2r,(x_1+a)+(x_2+a)=2r$$

故 $$|AM|+|AN|=|AB|$$

证法 5　如图 4.4,以 A 为极点,AB 的延长线为极轴建立极坐标系.设 $M(\rho_1,\theta_1)$、$N(\rho_2,\theta_2)$,半圆方程为

$$\rho=2r\cos\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

因 $$|MP|=|AM|,|NQ|=|AN|$$

则 M、N 在以 l 为准线,A 为焦点,极轴为对称轴,开口向右的抛物线 $\rho=\dfrac{2a}{1-\cos\theta}$上,由题设知 M、N 是抛物线与半圆的交点,于是由方程组

$$\begin{cases}\rho=2r\cos\theta\\ \rho=\dfrac{2a}{1-\cos\theta}\end{cases},\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

消去 $\cos\theta$,得 $\rho^2-2r\rho+4ar=0$,所以由韦达定理得

$$\rho_1+\rho_2=2r$$

即 $$|AM|+|AN|=|AB|$$

试题 A2　已知:边长为 4 的正$\triangle ABC$. D、E、F 分别是 BC、CA、AB 上的点,且 $|AE|=|BF|=|CD|=1$,联结 AD、BE、CF,交成$\triangle RQS$,点 P 在$\triangle RQS$ 内及其边上移动,P 到$\triangle ABC$ 三边的距离分别是 x、y、z.

(1)求证:点 P 在$\triangle RQS$ 的顶点位置时,乘积 xyz 有极小值.

(2)求上述乘积的极小值.

证法 1　如图 4.5,由假设,有

$$AB=BC=CA=4,AE=CD=BF=1$$

又因 $$\angle BAC=\angle CBA=\angle ACB$$

则 $$\triangle ABE\cong\triangle BCF\cong\triangle CAD$$

故 $$\triangle AER\cong\triangle BFQ\cong\triangle CDS$$

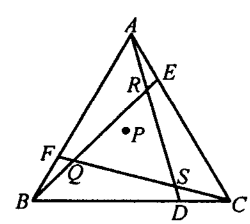


图 4.5

从而$\triangle RQS$ 是正三角形.当动点 P 在$\triangle RQS$ 的内部及边界上变动时,我们将证明:

(i)当 P 在$\triangle RQS$ 内时,xyz 不是最小值.

(ii)当 P 在线段 QS 内(不包括 Q、S 两点),xyz 也不是最小值.

如果以上两条得证,再由与 R、Q、S 三点相应的 x、y、z 相同,即知这三点的 xyz 是最小的,从而(1)得证.

证明 (i)设 P_0 在$\triangle RQS$之内,过 P_0 作 $MN /\!/ BC$,且设 MN 与 RS 交于 N,与 RQ(或 QS)交于 M,如图 4.6 所示.

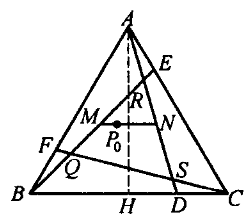


图 4.6

此时 MN 上每点 P 的 x 恒为 x_0(我们用 x_0、y_0、z_0 表示 P_0 到三边的距离),从而 $y+z=2\sqrt{3}-x_0$ 是常数(这里用到正三角形内及边界上任一点到三边的距离和为定值高的长,即 $x+y+z=\sqrt{3}$).

注意到 $yz=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y-z}{2}\right)^2$,当$|y-z|$越大则 yz 越小.

现在 M、N 中总有一点的$|y-z|$比 P_0 的$|y_0-z_0|$大,因此这点的 $yz<y_0z_0$.即

$$xyz<x_0y_0z_0$$

可见$\triangle RQS$ 内的任一点 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 不是最小值.

(ii)考虑线段 QS 内的点 P_0.设 H 为 BC 中点,$BG=IC=1$,FC 分别与 AG、AH 的交点为 L、K,BI 也通过 K 且与 AD 交于 T,如图 4.7 所示.

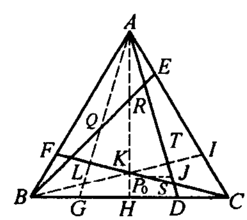


图 4.7

当 P_0 在 KS 上(不取 S),作 $P_0J /\!/ BC$,P_0J 交 AD 于 J,此时 P_0 与 J 的横坐标相等,而点 J 的 $z-y>z_0-y_0>0$(因为 J 比 P_0 离中垂线 AH 更远),由于 P_0J 上每点的 $y+z=2\sqrt{3}-x_0$ 是常数,所以点 J 的 $yz<y_0z_0$,即 $xyz<x_0y_0z_0$,因此 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 不是最小.

当 P_0 在 LK 之内,它关于 AH 的对称点必在 KT 之内,P_0 与其对称点的 xyz 都相同,但此对称点已落在$\triangle RSQ$ 内,已证明其 xyz 不是最小,所以 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 也不是最小.

当 P_0 落在 QL 上(但不取 Q),则过 P_0 作 $P_0V /\!/ AC$,设 P_0V 与 BE 交于 V,因为直线 BL 垂直平分 AC,V 比 P_0 离 BL 更远,所以 V 的 $x-z>x_0-z_0$,而 $y=y_0$,因此 $xz<x_0z_0$,即 V 的 $xyz<x_0y_0z_0$.

知 P_0 的 $x_0y_0z_0$ 也不是最小,所以,只有 S、Q、R 有可能取最小 xyz.

最后,来计算最值 xyz,由

$$\triangle ARE \backsim \triangle ACD(因\angle ARE = \angle C = 60°)$$

知
$$AR_1 : RE = 4:1$$
即
$$AR : SD = 4:1$$
又由$\triangle ASF \backsim \triangle ABD$(因$\angle ASF = \angle B$)知
$$AS : SF = 4:3$$
设 $SD = l$,则 $AR = 4l$, $FQ = l$,则
$$\frac{4}{3} = \frac{AS}{SF} = \frac{AR + RS}{QS + QF} = \frac{4l + RS}{RS + l}$$
解得 $RS = 8l$,即
$$|AR|:|RS|:|SD| = 4:8:1$$
作 $RR' \perp BC$, $QQ' \perp BC$, $SS' \perp BC$,垂足分别为 R'、Q'、S',则
$$\frac{RR'}{QQ'} = \frac{BR}{BQ} = \frac{AS}{AR} = 3$$
$$\frac{QQ'}{SS'} = \frac{QC}{SC} = \frac{AS}{AR} = 3$$
即
$$RR' = 9SS', QQ' = 3SS'$$
但
$$RR' + QQ' + SS' = 2\sqrt{3}$$
所以点 R 的 $x_1 = RR' = \frac{9}{13} \times 2\sqrt{3}$, $y_1 = SS' = \frac{1}{13} \times 2\sqrt{3}$, $z_1 = QQ' = \frac{3}{13} \times 2\sqrt{3}$.
因此,xyz 的最小值为
$$x_1y_1z_1 = \frac{648}{2\ 197}\sqrt{3}$$

证法 2　如图 4.8,标上各点.记$\triangle ABC$ 的中心为 O,把图形以点 O 为中心逆时针旋转 120°后,A 变为 B,B 变为 C,C 变为 A,E 变为 F,F 变为 D,D 变为 E,从而 R 变成 Q,Q 变成 S,S 变成 R.分别用 Q_1、Q_2、Q_3 表示点 Q 到 BC、CA、AB 的距离(同样,S_1 表示点 S 到 BC 的距离,R_2 表示点 R 到 CA 的距离,等等),可见

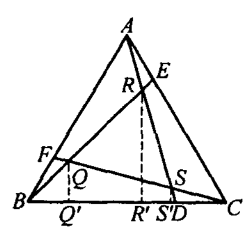


图 4.8

$$S_1 = R_2 = Q_3, S_2 = R_3 = Q_1, S_3 = R_1 = Q_2$$

如果两个数 x, y 之和为 a,那么它们的乘积
$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] = \frac{1}{4}[a^2 - (x-y)^2]$$
所以,如果 $x + y = a$,则当 $x = y = \frac{a}{2}$时,乘积 xy 最大;而在$|y - x|$较大时,xy

的值较小.

由于正△ABC 内任意一点 P 到三边的距离之和等于该三角形的高,因此,如果 l 是与 BC 平行的直线,当 P 在 l 上变动时,P 到三边的距离乘积在 P_0(l 与 BC 边上的高的交点)处为最大,而当 $|PP_0|$ 较大时,P 到三边的距离之积较小,而且,l 上与 P_0 等距离的点,这乘积是相等的. 对于与 AC 或 AB 平行的直线,也有同样的结论.

对于△RQS 内任何点 P,过 P 作 BC 的平行线 l,l 与△RQS 的交点为 L、N. 这时,$|LP_0|$ 与 $|NP_0|$ 中总有一个比 $|PP_0|$ 大,所以乘积的最小值必定在△RQS 的边上取到.

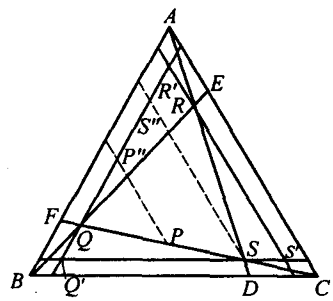


图 4.9

如图 4.9,过 Q 作 AB 的平行线,过 S 作 BC 的平行线,过 R 作 AC 的平行线,这三条直线交得△$R'Q'S'$,这是与△ABC 同中心的正三角形.

对于 QS 上的点 P,过 P 和 S 作 AC 的平行线,分别交 $R'Q'$ 于 P'' 和 S''. 易见,S'' 与 S 关于 AC 边上的高对称,S'' 与 Q 关于 AB 边上的高对称. 这时

$$P_1P_2P_3 \geqslant P''_1P''_2P''_3 \geqslant Q_1Q_2Q_3$$
$$(Q_1Q_2Q_3 = S''_1S''_2S''_3 = S_1S_2S_3)$$

所以,当 P 在△RQS 内(包括三边上)时,乘积 $P_1P_2P_3 \geqslant Q_1Q_2Q_3$,即乘积在顶点处取极小值.

最后,计算这极小值. 由于△ARE ∽ △ACD,则

$$|AR| : |RE| = 4:1$$

由于△AFS ∽ △ADB,则

$$|AS| : |SF| = 4:3$$

因此
$$|AR| : |RS| : |SD| = 4:8:1$$

因为△ABC 的高 $H=\sqrt{12}$,则

$$S_1=\frac{1}{13}H, S_2=\frac{3}{13}H, S_3=\frac{9}{13}H$$

所以
$$S_1S_2S_3=\left(\frac{1}{13}\right)\cdot\left(\frac{3}{13}\right)\cdot\left(\frac{9}{13}\right)\cdot(\sqrt{12})^3=\left(\frac{648}{2\ 197}\right)\sqrt{3}$$

注 对于试题 A2 中(1)可以提出更一般的命题①:

① 张运筹. 两道数学竞赛的探讨[J]. 湖南数学通讯,1983(3):6-8.

在△ABC中,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,D、E、F分别是线段BC、CA、AB上的点,且$\frac{BD}{DC}=p$,$\frac{CE}{EA}=q$,$\frac{AF}{FB}=r$,AD、BE、CF交成△RQS,点P在△RQS内及其边上移动,点P到BC、CA、AB的距离分别记作x_P、y_P、z_P.求证

$$\min x_Py_Pz_P=\min\{x_Ry_Rz_R, x_Qy_Qz_Q, x_Sy_Sz_S\}$$

证明 如图4.10,设P在△RQS内,则BP必分别交SR、SQ、AC于R'、Q'、E'.令

$$BE'=l, \angle CBE'=\theta, BP=t$$

则
$$F(P)=x_Py_Pz_P=t^2(l-t)\cdot \sin\theta\sin(B-\theta)\sin(C+\theta)$$

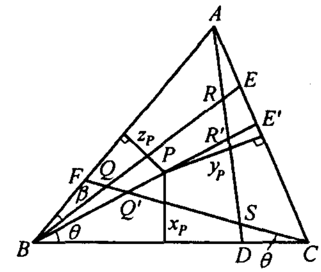


图4.10

令$f(t)=t^2(l-t)$,则

$$f'(t)=t(2l-3t)\begin{cases}>0, & t<\frac{2}{3}l\\ =0, & t=\frac{2}{3}l\\ <0, & t>\frac{2}{3}l\end{cases}$$

从而$f(t)$在$\left[0,\frac{2}{3}l\right]$上递增,在$\left[\frac{2}{3}l,l\right]$上递减,在$[0,l]$上当且仅当$t=\frac{2}{3}l$时取极大值.在$BE'$上截取$BM=\frac{2}{3}l$.因对于$BE'$上的$P$来说,因$\sin\theta\sin(B-\theta)\cdot\sin(C+\theta)$是正常数.故$F(P)$在$BE'$上当且仅当$P=M$时取极大值,$P$从$B$移向$M$,则$F(P)$递增;$P$从$M$移向$E'$,则$F(P)$递减.当$M=P$或$M$在$P$、$E'$间,则$F(P)>F(Q')$;当$M$在$B$、$P$间,则$F(P)>F(R')$,所以$F(P)$的极小值在△$RQS$边上达到.

像考虑BE'上的动点一样去考虑BE、CF、AD上的动点,可知

$$\min F(P)=\min\{F(R), F(Q), F(S)\}$$

注意1 $f(t)=t^2(l-t)$的增减性,也可不用求导数,而用增、减函数的定义得到.事实上:

(1)当$\frac{2}{3}l>t_2>t_1$时,有

$$\begin{aligned}f(t_2)-f(t_1)&=(t_2-t_1)[t_1(l-t_1)+t_2(l-t_2)-t_1t_2]>\\&(t_2-t_1)\left(\frac{l}{3}t_1+\frac{l}{3}t_2-t_1t_2\right)>\\&(t_2-t_1)\left(\frac{1}{2}t_2t_1+\frac{1}{2}t_1t_2-t_1t_2\right)=0\end{aligned}$$

即 $f(t_2)>f(t_1)$,这时 $f(t)$ 递增.

(2)当 $t_2>t_1>\frac{2}{3}l$ 时,有

$$f(t_2)-f(t_1)=(t_2-t_1)[l(t_1+t_2)-3t_1t_2-(t_1-t_2)^2]<$$
$$(t_2-t_1)(lt_1+lt_2-3t_1t_2)<$$
$$(t_2-t_1)\left(\frac{3}{2}t_2t_1+\frac{3}{2}t_1t_2-3t_1t_2\right)=0$$

即 $f(t_2)<f(t_1)$,这时 $f(t)$ 递减.

注意 2 $F(R)$、$F(Q)$、$F(S)$ 可由 a、b、c、p、q、r 表出,其大小可以比较,但在一般情况下计算很麻烦.当 $p=q=r=3,a=b=c=4$ 时,设 $\angle BCF=\gamma$,有

$$x_P+y_P+z_P=h=2\sqrt{3}$$

因

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$$

则

$$\frac{DS}{SA}=\frac{S_{\triangle CDS}}{S_{\triangle CAS}}=\frac{1\sin\gamma}{4\sin(C-\gamma)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{S_{\triangle CBF}}{S_{\triangle CAF}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

从而 $\frac{DS}{AD}=\frac{1}{13}$,即 $\frac{x_S}{h}=\frac{1}{13}$,故 $x_S=\frac{h}{13}$,又

$$\frac{DR}{RA}=\frac{S_{\triangle BDR}}{S_{\triangle ABR}}=\frac{3\sin(B-\beta)}{4\sin\beta}=\frac{3}{4}\cdot\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BAE}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}$$

则 $\frac{DR}{AD}=\frac{9}{13}$,即 $\frac{x_R}{h}=\frac{9}{13}$,故

$$x_R=\frac{9}{13}h=z_S$$

从而

$$h-x_S-z_S=\frac{3}{13}h=y_S$$

故

$$\min F(P)=F(S)=x_Sy_Sz_S=\frac{h}{13}\cdot\frac{3h}{13}\cdot\frac{9h}{13}=\frac{648}{2\,197}\sqrt{3}$$

按原参考解答,抓住正三角形中 $x+y+z=h$ 不放,是不能推广到任意三角形的.这里通过正弦定理,考虑 $f(t)=t^2(1-t)$ 的增减性,是本题得以推广的关键一步.这里用三角形面积比与线段比的互换来求 x、y、z 也是很方便的.

第 1 节 局部调整策略及运用

局部调整策略就是为了解决某个问题,从与问题有实质联系的较宽要求开始,充分利用已获得的结果作为基础,逐步加强要求,逼近目标,直至最后彻底解决问题的一种解题策略.特别是在处理有多个变量的问题时,先对其中少数

变量进行调整,让其他变量暂时保持不变,取得问题的局部解决;再来调整原来假定不变的变量,经过综合调整,以求得问题的圆满解决.

下面看几道例子.①②

例1 已知锐角△ABC中,$\angle A>\angle B>\angle C$.在△$ABC$的内部(包括边界上)找一点$P$,使得$P$到三边的距离之和为最小.

分析 先讨论点P在△ABC边界上的情况,研究点P在什么位置时,P到三边距离之和最小;然后再对点P在△ABC的内部的情形进行研究.

解 当点P在△ABC的边界上时:

(1)若点P在边BC上,如图4.11所示,记△ABC的顶点A、B、C对应的三边长分别为a、b、c,三边上的高分别为h_a、h_b、h_c.P到边AB、AC的距离分别为x、y,联结PA.由已知得$a>b>c$,故$h_a<h_b<h_c$.

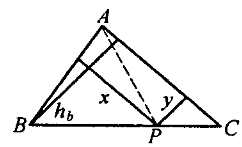


图4.11

由面积关系得

$$\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}cx+\frac{1}{2}yb\leqslant\frac{1}{2}xb+\frac{1}{2}yb$$

所以,$h_b\leqslant x+y$(当$x=0$时取等号).

即点P与点B重合时,P到三边距离之和最小.

(2)若点P在边AC上,且点P与点A重合时,P到三边距离之和最小.

(3)若点P在边AB上,且点P与点A重合时,P到三边距离之和最小.

综上可知,当点P与点A重合时,P到三边距离之和最小.

当点P在△ABC内部时:

如图4.12,过点P作BC的平行线交AB于E,交AC于F.固定x,由步骤1知

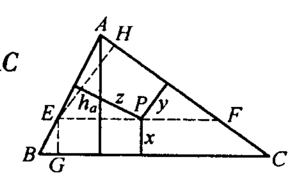


图4.12

$$x+y+z>EG+EH$$

变化x,有

$$EG+EH\geqslant h_a$$

故

$$x+y+z>h_a$$

综上可知,当点P与点A重合时,$x+y+z$最小.

例2 已知正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,满足$x_1x_2\cdots x_n=1$.求证

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$$

① 郑日锋.解数学竞赛题的局部调整策略[J].中等数学,2004(4):10-12.
② 韩淑英.局部调整法[J].中学生数学,1999(7):21-22.

分析 先从特殊情形入手,当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,不等式成立,然后研究一般情况,通过局部调整解决问题.

证明 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,不等式成立.

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中不全为 1 时,其中必有一个属于 $(0,1)$,一个属于 $(1,+\infty)$. 由对称性,不妨设

$$0<x_1<1<x_n,x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$$

(1)若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1}$,因为

$$\frac{1}{n-1+x_2}+\frac{1}{n-1+x_3}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_{n-1}}<\underbrace{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}}_{(n-2)\text{个}}=\frac{n-2}{n-1}$$

故

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}<1$$

(2)若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}>\frac{1}{n-1}$,即

$$x_1x_n<(n-1)^2$$

第一次调整:令

$$x'_1=1,x'_n=x_1x_n,x'_j=x_j,2\leqslant j\leqslant n-1$$

下面证明

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant$$
$$\frac{1}{n-1+x'_1}+\frac{1}{n-1+x'_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x'_n}$$

即证

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1+1}+\frac{1}{n-1+x_1x_n} \qquad ①$$

令 $f(x)=\frac{1}{n-1+x}$,则

$$f(x)+f(z)=\frac{1}{n-1+y}+\frac{1}{n-1+z}=\frac{2(n-1)+y+z}{(n-1)^2+yz+(n-1)(y+z)}$$

记

$$m=(n-1)(x_1+x_n)$$
$$m'=(n-1)(x'_1+x'_n)=(n-1)(1+x_1x_n)$$
$$b=(n-1)^2+x_1x_n=(n-1)^2+x'_1x'_n$$
$$a=2(n-1),c=\frac{1}{n-1}$$

故
$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}=f(x_1)+f(x_n)=\frac{a+cm}{b+m}$$
$$\frac{1}{n-1+1}+\frac{1}{n-1+x_1x_n}=f(x'_1)+f(x'_n)=\frac{a+cm'}{b+m'}$$
因为 $m'-m=(n-1)(1+x_1x_n-x_1-x_n)=(n-1)(x_1-1)(x_n-1)<0$

所以
$$m'<m$$
$$式①\Leftrightarrow\frac{a+cm}{b+m}\leqslant\frac{a+cm'}{b+m'}\Leftrightarrow(a-bc)(m-m')\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant bc\Leftrightarrow$$
$$2(n-1)\geqslant\frac{1}{n-1}[(n-1)^2+x_1x_n]\Leftrightarrow x_1x_n\leqslant(n-1)^2$$

已假设 $x_1x_n<(n-1)^2$，所以
$$x_1x_n\leqslant(n-1)^2$$
故
$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant$$
$$\frac{1}{n-1+x'_1}+\frac{1}{n-1+x'_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x'_n}=$$
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1+x'_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x'_n}$$
其中，$x'_2x'_3\cdots x'_n=1$.

再继续调整，可得
$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}=1$$

注 本题调整的目的是逐步将所证不等式左边各项变为$\frac{1}{n}$.需要注意，每次调整应使各变量的积为1，而且不等式左边放大.

例3 周长为定值 l 的四边形中何者面积最大呢？是否是正方形？

解 首先，周长定值的四边形要有最大面积不可能是凹四边形. 否则如图4.13所示，四边形 $ABCD$ 中，选 BC，以 BD 为轴作 A 的对称点 A'，即调整顶点 A 到 A' 的位置，凹四边形 $ABCD$ 变成凸四边形 $A'BCD$. 因 $A'B=AB$，$A'D=AD$，所以四边形 $ABCD$ 的周长与四边形 $A'BCD$ 的周长相等，但 $S_{ABCD}<S_{A'BCD}$.

其中，由于交换两邻边位置不会改变四边形的周长及面积，如图4.14所示，$\triangle A'BD\cong\triangle ABD$. 因此可进行调整，使各边沿顺时针方向由短到长的顺序排列. 不妨设
$$A'D\leqslant DC\leqslant CB\leqslant A'B$$
若存在不等边，则 $A'D<BA'$. 如图4.15所示，再进行调整，固定$\triangle BCD$ 不变，作

$\triangle A''BD$,使

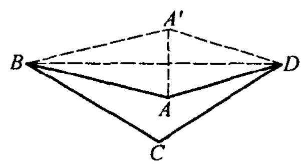


图 4.13

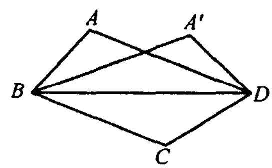


图 4.14

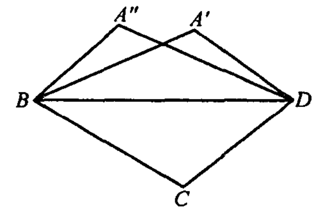


图 4.15

$$A''B+A''D=A'B+A'D, A''B=\frac{l}{4}$$

设 $$p=\frac{1}{2}(A'B+A'D+BD)$$

则 $$|A''B-A''D|<|A'B-A'D|$$

所以 $$|(p-A''B)-(p-A''D)|<|(p-A'B)-(p-A'D)|$$

且 $$(p-A''B)+(p-A''D)=(p-A'B)-(p-A'D)$$

因为对任意实数 a、b,当 $a+b$ 为定值时,$|a-b|$减小,ab 增大,故

$$(p-A''B)+(p-A''D)>(p-A'B)-(p-A'D)$$

由海伦公式,知 $S_{\triangle A''DB}>S_{\triangle A'BD}$.

四边形 $A''BCD$ 与四边形 $A'BCD$ 相比较,周长不变,面积增大了.重复上述调整,可使四边形变为等边四边形即菱形,而且面积有所增大.换句话说,周长为 l 的四边形要有最大面积应为菱形.

设 α 为调整后所得菱形一组邻边的夹角,因

$$S_{四边形}=\left(\frac{l}{4}\right)^2\sin\alpha\leqslant\frac{l^2}{16}$$

故 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时,须调整 α,使 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,这样得到周长为定值的四边形面积中最大者为正方形.

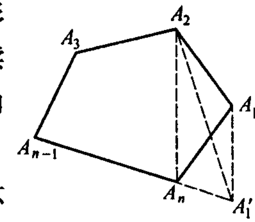
练 习 题

1. 把一个凸 $n(n>3)$边形变为等积的三角形.

2. 以 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$,求$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}$的最小值.

练习题解答

1. 作法如图所示. 将 A_1 平移到 A'_1，可将 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 变为等积的 $(n-1)$ 边形 $A'_1A_2A_3\cdots A_{n-1}$，继续上述变换，经过 $(n-3)$ 次即得一与原 n 边形等积的三角形.



第1题

2. 令 $f(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}$，先保持 α 不变，调整 β 得

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}$$

欲使 $f(\alpha,\beta)$ 最小，则使 $\sin^2 2\beta=1$. 因 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，故此时 $2\beta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$. 再考虑调整 α 的取值有

$$f(\alpha,\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha+4\csc^2\alpha=5+\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha\geqslant$$
$$5+2\sqrt{\tan^2\alpha\cdot 4\cot^2\alpha}=9$$

当且仅当 $\tan^2\alpha=\cot^2\alpha$ 时取等号，因 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tan\alpha=2\cot\alpha$，从而有

$$\alpha=\arctan\sqrt{2}$$

综上所述，当 $\alpha=\arctan\sqrt{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f(\alpha,\beta)$ 有最小值 9.

第2节　三角形中的极值点问题

命题1　三角形内到三边距离之积最大的点是其重心.

证明　设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D、E、F 分别为 P 到 BC、CA、AB 边的垂足，如图 4.16 所示. 令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则

$$2S_{\triangle ABC}=a\cdot PD+b\cdot PE+c\cdot PF\geqslant 3\sqrt[3]{abc\cdot PD\cdot PE\cdot PF}$$

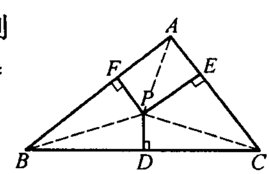


图4.16

从而
$$PD\cdot PE\cdot PF\leqslant\frac{(\frac{2}{3}S_{\triangle ABC})^3}{abc}$$

要取最大值,当且仅当 $a\cdot PD=b\cdot PE=c\cdot PF$,即

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAC}$$

亦即 P 为三角形重心时,$PD\cdot PE\cdot PF$ 最大.

命题 2 三角形内到三顶点的距离平方和最小的点是其垂心.

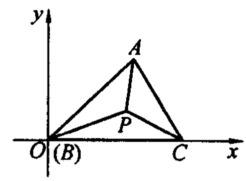


图 4.17

证明 设 P 为△ABC 内一点,以 B 为原点,BC 为 x 轴建立坐标系,如图 4.17 所示.设 $C(x_3,0)$、$A(x_1,y_1)$、$B(0,0)$,又设 $P(x_0,y_0)$.则

$$PA^2+PB^2+PB^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+x_0^2+y_0^2+(x_0-x_3)^2+y_0^2=$$
$$3x_0^2-2x_0(x_1+x_3)+x_1^2+x_3^2+3y_0^2-2y_0y_1+y_1^2$$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$,当 $x=\frac{b}{2a}$时取极值,所以上式 $x_0=\frac{x_1+x_3}{3}$,$y_0=\frac{y_1}{3}$时(此时 P 为重心)取极小值,所以 P 为垂心时,$PA^2+PB^2+PC^2$ 最小.

命题 3 三角形内三顶点顺次与到三边射影的平方和最小的点是其外心.

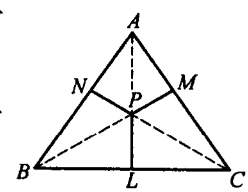


图 4.18

证明 设 P 为△ABC 内一点,P 在边 BC、CA、AB 上的射影分别为 L、M、N.如图 4.18 所示,则

$$BL^2=BP^2-PL^2,CM^2=PC^2-PM^2,AN^2=PA^2-PN^2$$

即

$$BL^2+CM^2+AN^2=PA^2+PB^2+PC^2-PN^2-PM^2-PL^2$$

同理 $$AM^2+CL^2+BN^2=PA^2+PB^2+PC^2-PN^2-PM^2-PL^2$$

则 $$BL^2+CM^2+AN^2=AM^2+CL^2+BN^2$$

即 $$2(BL^2+CM^2+AN^2)=AN^2+BN^2+BL^2+CL^2+CM^2+AM^2\geqslant$$
$$\frac{(AN+BN)^2}{2}+\frac{(BL+LC)^2}{2}+\frac{(CM+AM)^2}{2}=$$
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

等号当且仅当 $BL=LC$,$MC=MA$,$AN=NB$,即 P 为外心时成立,所以 P 为外心时,$BL^2+CM^2+AN^2$ 达到极小.

命题 4 三角形内各边与到边距离比之和最小的点是其内心.

证明 同命题 1 证明所设,有

$$2S_{\triangle ABC}=a\cdot PD+b\cdot PE+c\cdot PF$$

为定值.由柯西不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

则

$$2S_{\triangle ABC}\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)=(a\cdot PD+b\cdot PE+c\cdot PF)\cdot\left(\frac{a}{PD}+\frac{b}{PE}+\frac{c}{PF}\right)\geqslant(a+b+c)^2$$

故

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$$

其最小值时 $PD=PE=PF$,即 P 为内心时取最小值.

命题5①　到三边不等的三角形三边距离之和最小的点是此三角形最大边所对顶点.

证明　设$\triangle ABC$内一点 P 到三边 BC、AC、AB 的距离分别为 x、y、z,并设 $BC=a,AC=b,AB=c,S_{\triangle ABC}=S$.则有

$$ax+by+cz=2S \qquad ①$$

不妨设 $a>b>c$,则

$$2S=ax+by+cz\leqslant ax+ay+az=a(x+y+z)$$

所以

$$x+y+z\geqslant\frac{2S}{a}$$

上式等号成立的条件为 $y=z=0$.故 $ax=2S$,x 为边 BC 上的高线长.从而,P 即为 A(最大边所对顶点).

对于 P 在$\triangle ABC$之外的情况易证.

命题6②　到三角形三边距离的平方和最小的点是此三角形重心的等角共轭点.

注　$\triangle ABC$内两点 D、E 互为等角共轭点的充分必要条件是$\angle DAB=\angle EAC,\angle DBC=\angle EBA,\angle DCA=\angle ECB$.

证明　题设同命题5.由柯西不等式,有

$$4S^2=(ax+by+cz)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$$

等号成立的条件为

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$$

将 $x=ka,y=kb,z=kc$ 代入式①,得

①、②王璐,李纯毅.有关三角形极值点的两个命题[J].中等数学,2004(4):19-20.

$$k=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$$

故
$$x=ka=\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin A$$

同理
$$y=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin B, z=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin C$$

易知同时满足到三边 BC、AC、AB 的距离分别为 $\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin A$、$\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin B$、$\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sin C$ 的点只有一个.故只须证$\triangle ABC$ 的重心的等角共轭点 O 为此点即可.

引理 设 O 为$\triangle ABC$ 的重心的等角共轭点,EF 交AB、AC、AO 于E、F、H.则 AH 为$\triangle AEF$ 的一条中线的充分必要条件是EF 为 BC 的逆平行线.

注 $\triangle ABC$ 中,EF 为BC 的逆平行线的充分必要条件是$\angle AEF=\angle C$,且$\angle AFE=\angle B$.

证明 如图 4.19,设 AD 为$\triangle ABC$ 的一条中线.

(1)若 EF 为 BC 的逆平行线,则$\triangle AEF\backsim\triangle ACB$.

因为 O 为$\triangle ABC$ 重心的等角共轭点,则
$$\angle DAC=\angle OAB=\angle HAE$$

所以
$$\triangle ADC\backsim\triangle AHE$$

从而易知 AH 为$\triangle AEF$ 的一条中线.

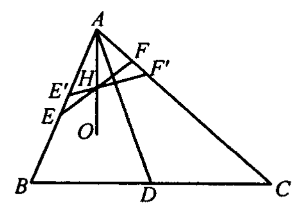


图 4.19

(2)若 AH 为$\triangle AEF$ 的一条中线,假设命题不成立,即 EF 不是 BC 的逆平行线.过 H 作BC 的逆平行线交AB、AC 于E'、F',则 $E'F'\neq EF$.由(1)知$E'H'=F'H$,则
$$\triangle EHE'\cong\triangle FHF'$$

故
$$\angle EE'H=\angle FF'H, EE'/\!/FF'$$

所以,$AB/\!/AC$.矛盾.因此,EF 是 BC 的逆平行线.综上所述,引理得证.

下面证明原命题.

如图 4.20,O 为$\triangle ABC$ 的重心的等角共轭点,过 O 分别作三边的平行线交三边于 D、E、F、G、H、I.则有

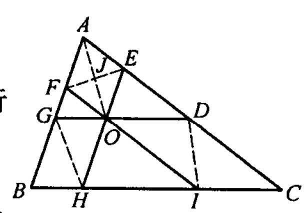


图 4.20

$$\triangle FGO\backsim\triangle EOD\backsim\triangle OHI\backsim\triangle ABC$$

联结 EF、GH、DI，联结 OA 交 EF 于 J. 则 AJ 为 $\triangle AEF$ 的中线. 又 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的等角共轭点，由引理知 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，因为 $\triangle AEF \cong \triangle OFE$，所以，$\triangle OFE \backsim \triangle ABC$. 同理，$\triangle HBG \backsim \triangle ABC$，$\triangle GOH \backsim \triangle ABC$.

设 $AF = m$，则

$$FO = AE = \frac{c}{b}AF = \frac{mc}{b}, FG = \frac{c}{b}FO = \frac{mc^2}{b^2}$$

$$BH = GO = \frac{a}{b}FO = \frac{mac}{b^2}, BG = \frac{a}{c}BH = \frac{ma^2}{b^2}$$

因为

$$AF + FG + GB = AB \Rightarrow m + \frac{mc^2}{b^2} + \frac{mc^2}{b^2} = c \Rightarrow$$

$$m = \frac{b^2c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

所以

$$GH = \frac{b}{c}BH = \frac{ma}{b} = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}$$

因为 $\triangle ABC \backsim \triangle GOH$，则 $\angle OGH = \angle A$.

故 O 到 BC 的距离为 $\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sin A$.

同理，O 到 AC、AB 的距离分别为 $\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sin B$、$\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sin C$. 故 O 即为所求. 从而，命题 2 得证.

命题 7①　设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，且 $BD : DC = CE : EA = AF : FB = \lambda$，$AD$、$BE$、$CF$ 交成 $\triangle RQS$，P 为 $\triangle RQS$ 内或其边上一点，以 S_c、S_a、S_b 分别表示 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的面积，则当点 P 位于 $\triangle RQS$ 顶点时，$S_aS_bS_c$ 达到最小值.

为了证明这个命题. 先看两条引理.

引理 1　设 $\triangle ABC$ 所在平面为 π，作平面 π' 与 π 交于直线 BC，在 π' 内作正 $\triangle A'B'C'$，使 $B'C'$ 与 BC 重合. 使 A 与 A' 对应，B 与 B' 对应，C 与 C' 对应，过 $\triangle ABC$ 内或边上任一点 X 作 AA' 的平行线交 π' 于 X'，则让 X 与 X' 对应，于是建立了 $\pi \to \pi'$ 的一一对应，则有：

(i) D、E、F 对应点 D'、E'、F' 分别位于 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 上，且有 $B'D' : D'C' = C'E' : E'A' = A'F' : F'B' = \lambda$.

(ii) R、Q、S 对应点 R'、Q'、S' 分别为 $A'D'$、$B'E'$、$C'F'$ 的两两的交点，P 的对应点 P' 仍在 $\triangle R'Q'S'$ 内或边上.

① 黄仁寿. 三角形分块面积乘积的一个性质[J]. 中学数学，1992(11)：25.

(iii) 以 $S_{a'}$、$S_{b'}$、$S_{c'}$ 分别表示 $\triangle P'B'C'$，$\triangle P'C'A'$，$\triangle P'A'B'$ 的面积，则 $S_a:S=S_{a'}:S'$，$S_b:S=S_{b'}:S'$，$S_c:S=S_{c'}:S'$。其中 S 和 S' 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

由于平行射影的性质，则引理的结论是显然的. 我们还有

引理 2 如图 4.21，设 D、E、F 分别为正 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，且 $BD:DC=CE:EA=AF:FB=\lambda$，联结 AD、BE、CF 交成 $\triangle RQS$，P 为 $\triangle RQS$ 内或边上一点，P 到 $\triangle ABC$ 三边距离分别为 x、y、z，则当 P 在 R、Q 或 S 时，积 xyz 达到最小.

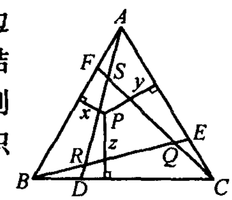


图 4.21

由于 $x+y+z=\sqrt{3}a$（熟知性质）（$2a$ 为等边 $\triangle ABC$ 一边长），问题归结为考虑函数 $f(x,y)=xy(\sqrt{3}-x-y)$ 的极值问题. 先考虑与 AC 平行的线段，这时 $y=c$（常数），则函数变为 $f(x,c)=cx(h_1-x)$. 其中 $h_1=\sqrt{3}a-c$，$x\in[\alpha,\beta]$，$0<\alpha<\beta<h_1$，这是一条开口向下的抛物线，在闭区间的最小值只能在区间端点达到，即 $\triangle RQS$ 的边上达到. 当 c 变化时，$y=c$ 平行移动，平行于 AC 的线段扫过整个 $\triangle RQS$，因而 $f(x,y)$ 在 $\triangle RQS$ 的边上取到最小值. 应用三次函数图象，可证明 $f(x,y)$ 在 $\triangle RQS$ 顶点达到最小值.

现证明命题 7.

由引理 1，可作正 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 点一一对应，则

$$S_aS_bS_c=\left(\frac{S}{S'}\right)^3 S_{a'}S_{b'}S_{c'}$$

设正 $\triangle A'B'C'$ 边长为 a，P' 到 $\triangle A'B'C'$ 三边距离为 x、y、z，则

$$S_aS_bS_c=\left(\frac{S}{S'}a\right)^3 xyz$$

由引理 2，知命题证毕.

当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，引理 2 正是 1982 年全国数学联赛试题.

为了介绍命题 8，先给出一个定义.

定义 若三角形有一个内角大于或等于 120°，则这个角的顶点即称为费马点；若三角形的内角没有大于 120°，点 P 满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点（图 4.22）.

容易知道，一个三角形的费马点存在且唯一.

命题 8 三角形的费马点，是平面上所有点中到三角形的三个顶点的距离

之和为最小的点.

证明　分别以 AC、AP 为边向同一方向作正$\triangle ACD$ 和正$\triangle APQ$，如图 4.23 所示，联结 QD，因

$$\angle PAC = 60^\circ - \angle CAQ = \angle QAD$$

易知

$$\triangle APC \cong \triangle AQD$$

则

$$PA + PB + PC = BP + PQ + QD$$

对于确定的$\triangle ABC$ 来说，D 是定点，当且仅当$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$ 时，点 B、P、Q、D 共线，$BP + PQ + QD$ 取得最小值，亦即当 P 为$\triangle ABC$ 的费马点时，$PA + PB + PC$ 为最小，证毕.

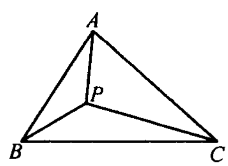


图 4.22

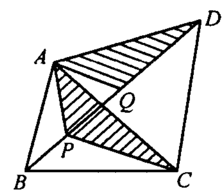


图 4.23

第5章 1983年试题的诠释

从这一年开始,在全国高中联赛第二试中平面几何试题仅一题,而这一年立体几何也有一题.

试题 A1 如图5.1,在四边形 $ABCD$ 中,$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积比是 3:4:1,点 M、N 分别在 AC、CD 上,满足 $AM:AC=CN:CD$,并且 B、M、N 共线.求证:M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

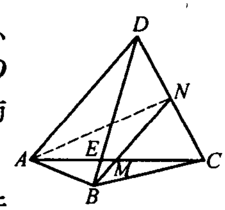


图5.1

证法1 不妨设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$,$S_{\triangle ABC}=1$,于是由题设,知

$$S_{\triangle ABD}=3,S_{\triangle BCD}=4,S_{\triangle ACD}=3+4-1=6$$

$$S_{\triangle ABM}=r,S_{\triangle BCM}=1-r,S_{\triangle BCN}=4r,S_{\triangle ACN}=6r$$

$$S_{\triangle CNM}=S_{\triangle BCN}-S_{\triangle BCM}=4r-(1-r)=5r-1$$

$$S_{\triangle ANM}=S_{\triangle ACN}-S_{\triangle CNM}=6r-(5r-1)=r+1$$

则

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{r+1}{6r}$$

又因

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{AM}{AC}=r$$

则 $\frac{r+1}{6r}=r$,即 $6r^2-r-1=0$.

这个方程在(0,1)中有唯一解 $r=\frac{1}{2}$,即 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

证法2 不妨设

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1),S_{\triangle ABC}=1$$

这时

$$S_{\triangle ABD}=3,S_{\triangle BCD}=4,S_{\triangle ACD}=6$$

$$S_{\triangle ABM}=r,S_{\triangle BCM}=1-r,S_{\triangle BCD}=4r,S_{\triangle ACN}=6r$$

设两条对角线 AC 与 BD 交于 E,如图5.1所示,则 $AE:EC=3:4$,且 $BD=7BE$,

即

$$\frac{S_{\triangle BND}}{S_{\triangle BME}}=\frac{BD\cdot BN}{BE\cdot BM}=\frac{7BN}{BM}=\frac{7S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BCM}}=\frac{28r}{1-r}$$

又因

$$\frac{S_{\triangle BND}}{S_{\triangle BME}}=\frac{(1-r)S_{\triangle BCD}}{\left(\frac{EM}{AC}\right)S_{\triangle ABC}}=\frac{4(1-r)AC}{EM}=\frac{4(1-r)AC}{AC-(AE+MC)}=$$

$$\frac{4(1-r)AC}{AC-\left[\left(\frac{3}{7}\right)+1-r\right]AC}=\frac{4(1-r)}{r-\left(\frac{3}{7}\right)}$$

故

$$\frac{28r}{1-r}=\frac{4(1-r)}{r-\left(\frac{3}{7}\right)}$$

即

$$(1-r)^2=r(7r-3)$$

亦即 $6r^2-r-1=0$，解得 $r=\frac{1}{2}$，故 M 与 N 分别为 AC 与 CD 的中点.

证法3　如图5.1，设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$，则

$$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$$

知

$$\frac{BE}{BD}=\frac{1}{7},\frac{AE}{AC}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{EM}{MC}=\frac{AM-AE}{MC}=\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}$$

又因 B、M、N 三点共线，可视 BMN 为 $\triangle CDE$ 之截线，故由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1$$

即

$$\frac{r}{1-r}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}=1$$

化简整理得

$$6r^2-r-1=0$$

解得 $r=\frac{1}{2}$，$r=-\frac{1}{3}$（舍去）.

即 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

证法4　取 CD 的中点 N_1，如图5.2所示.联结 AN_1，再联结 BN_1 交 AC 于

M_1.

设 $S_{\triangle ABC}=1$,则有

$$S_{\triangle AN_1D}=\frac{1}{2}(3+4-1)=3$$

于是 $$S_{\triangle AN_1D}=S_{\triangle ABD}$$

故 $BN_1/\!/AD$,所以 M_1 是 AC 的中点.显然 M_1、N_1 满足题设条件

$$AM_1:AC=CN_1:CD$$

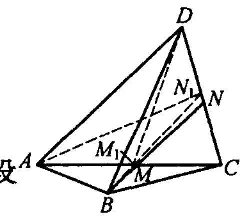


图 5.2

再过 B 任作一直线,分别交 AC、CD 于点 M、N.若 M 在 CM_1 上,则 N 在 CN_1 上.

即 $AM>AM_1$,$CN_1>CN$.于是,有

$$\frac{AM}{AC}>\frac{AM_1}{AC}=\frac{CN_1}{CD}>\frac{CN}{CD}$$

不满足 $AM:AC=CN:CD$.若 M 在 AM_1 上时,亦如此.

这就证得满足题设条件的 M、N 必是 AC 与 CD 的中点.

证法 5 取 AB、CD 的中点 M_1、N_1,联结 M_1N_1、BM_1、DM_1 如图 5.2 所示,则 $M_1N_1/\!/AD$,且

$$S_{\triangle AM_1D}=S_{\triangle M_1DC}$$

由题意可得

$$S_{\triangle ACD}=6S_{\triangle ABC},S_{\triangle AM_1D}=3S_{\triangle ABC}$$

又 $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ABC}$,即 $S_{\triangle AM_1D}=S_{\triangle ABD}$,有 $BM_1/\!/AD$,故 B、M_1、N_1 共线.

由 $AM:AC=CN:CD$ 可得 $AM:MC=CN:ND$,令比值为 λ.

若 M、N 与 M_1、N_1 不重合,则 $\lambda\neq1$,此时 AM 大(或小)于 AM_1,同时 CN 大(或小)于 CN_1,M、N 必分别在 M_1N_1 的两侧,线段 MN 与 M_1N_1 必相交于一点 Q,且点 Q 在 M_1、N_1 之间.这样,BMN 和 BM_1N_1,有两个交点 B、Q,这显然与两直线只能有一交点矛盾.故 M、N 必分别与 M_1、N_1 重合,M、N 分别是 AC、CD 的中点.

证法 6 如图 5.3,设 O 为 AC、BD 的交点.作 $DE\perp AC$ 于 E,$BG\perp AC$ 于 G,$CF\perp BD$ 于 F,$AH\perp BD$ 于 H,则

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE}{BG}=6,\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{CF}{AH}=\frac{4}{3}$$

如图5.3建立坐标系，令各点为 $A(-3a,0)$、$C(4a,0)$、$B(-b,-c)$、$D(6b,6c)$、$M(x_1,0)$、$N(x_2,y_2)$，由 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$ 得，$\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{ND}$，令 $\frac{AM}{MC}=\lambda$，则

$$x_1=\frac{-3a+4a\lambda}{1+\lambda},x_2=\frac{4a+6b\lambda}{1+\lambda},y_2=\frac{6c\lambda}{1+\lambda}$$

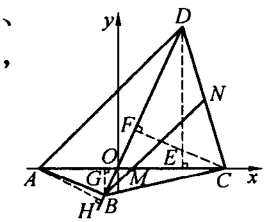


图5.3

由 B、M、N 共线，则

$$\begin{vmatrix} -b & -c & 1 \\ \frac{-3a+4a\lambda}{1+\lambda} & 0 & 1 \\ \frac{4a+6b\lambda}{1+\lambda} & \frac{6c\lambda}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}=0$$

化简得

$$4\lambda^2-3\lambda-1=0$$

解得

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{4}(\text{不合题意，舍去})$$

故 M、N 分别为 AC、CD 的中点.

注 (1)此试题是根据1982年第23届国际数学奥林匹克第5题改编的. 该题是：设 M、N 分别是正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 的内分点，使 $AM:AC=CN:CE=r$. 若 B、M、N 共线，求 r.

若联结 AE、BE，则有 $\triangle ABE$、$\triangle BCE$、$\triangle ABC$ 面积之比为 2:2:1，其余条件不变. 这两题只是前者证明 $r=\frac{1}{2}$，后者计算比值 r.

(2)此试题还可推广到一般情形：

在四边形 $ABCD$ 中，设 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的面积之比为 $m:n:1(m+n\neq1)$，M、N 分别在 AC、CD 上，且 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r$，$B$、$M$、$N$ 在一条直线上，求 r 的值.

此问题的解法与试题解法类似(解法略).

(3)若放宽题设条件，将“M、N 分别在 AC、BD 上”放宽到“或在它们的延长线上”，即将题改为：在凸四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 面积之比为 3:4:1，点 M、N 分别在 AC、BD 或它们的延长线上，满足 $AM:AC=CN:CD$，且 B、M、N 三点共线，试求 $AM:AC$ 的值.①

(i) M、N 在 AC、BD 上就是原题，$AM:AC=\frac{1}{2}$.

① 过荣生，章可宁. 对一道竞赛题的初探[J]. 中学数学教学，1984(2):39-40.

(ii) M、N 在 CA、DC 的延长线上时，如图 5.4 所示，设 $S_{\triangle ABC}=1$，$S_{\triangle ABM}=m$，则

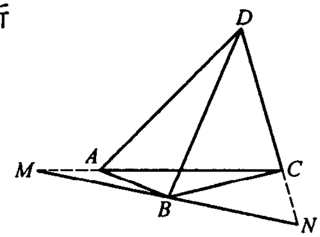


图 5.4

$$S_{\triangle ACD}=6, S_{\triangle BCD}=4, S_{\triangle BCM}=1+m, \frac{AM}{AC}=m$$

$$\frac{S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{CN}{CD}=\frac{AM}{AC}=m$$

则

$$S_{\triangle BCN}=4m, S_{\triangle CMN}=S_{\triangle BCM}+S_{\triangle BCN}=5m+1 \quad ①$$

又 $$\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AM}{AD}=m$$

则 $$S_{\triangle AMD}=6m, S_{\triangle CMD}=6+6m$$

而 $$\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle MCD}}=m$$

故 $$S_{\triangle CMN}=(6+6m)m \quad ②$$

由①、②得

$$6m^2+m-1=0$$

解得 $$m_1=\frac{1}{3}, m_2=-\frac{1}{2}(\text{不合题意，舍去})$$

故 $$AM:AC=CN:CD=\frac{1}{3}$$

(iii) 若 M 在 AC 上而 N 在 DC 延长线上时，设 $S_{\triangle ABM}=m$，用同样方法可得方程 $6m^2-3m+1=0$，方程无解，故这种情况不存在.

(iv) M 在 AC 延长线上，N 在 CD 上，和(iii)类似，不存在.

因而该题的结论为

$$AM:AC=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{当 } M、N \text{ 分别在 } AC、CD \text{ 上} \\ \frac{1}{3}, \text{当 } M、N \text{ 分别在 } AC、CD \text{ 的延长线上}\end{cases}$$

(4) 若再放宽条件，不限定四边形 $ABCD$ 为凸四边形，即题改为：“在四边形 $ABCD$（包括凸、凹情况）中…”其余都与(1)中题设条件一样.①

首先分析一下四边形 $ABCD$ 存在的情况，先确定三个顶点 A、B、C，第四个顶点 D 可能落在以 AB、BC、AC 划分的七个区域内，如图 5.5 所示. 根据条件，$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$，$D$ 只可能落在区域Ⅱ、Ⅴ内（在Ⅰ内，$S_{\triangle ABD}<$

① 过荣生，章可宁. 对一道竞赛题的初探[J]. 中学数学教学，1984(2):39-40.

$S_{\triangle ABC}$;在Ⅲ内,$S_{\triangle BAD} > S_{\triangle CBD}$;在Ⅳ或Ⅵ内,不是凸或凹四边形;在Ⅶ内,$S_{\triangle BCD} > S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC}$,都不符题设条件).

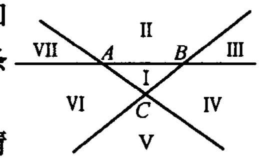


图5.5

点 D 在Ⅱ内就是(3),因此只须要讨论在Ⅴ内的情况.

用同样的方法可知也只有 M 在 CA 延长线上,N 在 CD 上时有解,即

$$AM:AC=\frac{1}{16}(\sqrt{41}-3)$$

如图5.6所示.

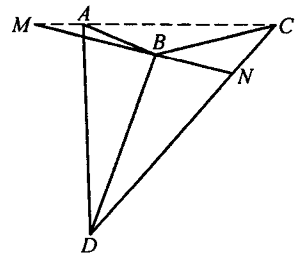


图5.6

(5)若再放宽条件,四边形 $ABCD$ 为交截四边形,如图5.5中,D 在区域Ⅳ、Ⅵ内.D 在Ⅵ内,$S_{\triangle BCD} < S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC}$不合题意.故只有 D 在Ⅳ内的情况,用上述方法可知,只有 M 在 AC 上,N 在 CD 延长线上有解,如图5.7所示.

$$AM:AC=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$$

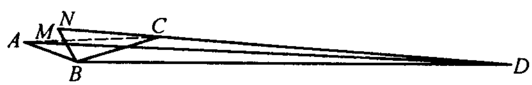


图5.7

综上所述,有

$$AM:AC=\begin{cases}\frac{1}{2},\frac{1}{3},\text{当 }ABCD\text{ 为凸四边形时}\\ \frac{1}{16}(\sqrt{41}-3),\text{为凹四边形时}\\ \frac{1}{4}(\sqrt{17}-3),\text{为交截四边形时}\end{cases}$$

试题 A2　(立体几何问题)在六条棱长分别为2,3,3,4,5,5的所有四面体中,最大的体积是多少?证明你的结论.

解　最大的体积是$\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

根据三角形两边之差小于第三边这一性质,按题设的数据,所有一边是2的三角形,其余两边只可能是①3,3;②5,5;③4,5;④3,4.从而,题设四面体中,

以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情形.

(1)①与②;(2)①与③;(3)②与④.

下面就这三种情形分别讨论之.

(1)如图 5.8, $AC=BC=3$, $AD=BD=5$, 因 $3^2+4^2=5^2$, 故 $CD\perp AC$, $CD\perp BC$, 从而 CD 垂直于平面 ABC.

由对称性,这样的四面体只有一个,其体积为

$$V_1=\frac{1}{3}CD\cdot\triangle ABC=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3^2-1}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(其中$\triangle ABC$ 表示$\triangle ABC$ 的面积,下同)

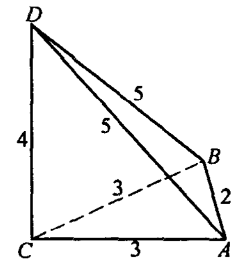


图 5.8

(2)这样的四面体有两个,如图 5.9 所示,易知它们的体积相等,记为 V_2.

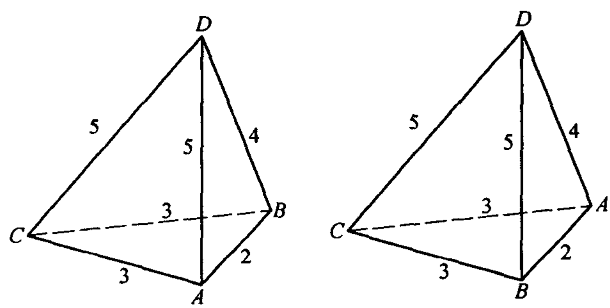


图 5.9

因 $2^2+4^2<5^2$, 故$\angle ABD$ 为钝角,即棱 BD 与平面 ABC 斜交,设 D 至底面 ABC 的高为 h_2, 则 $h_2<BD=4$. 故

$$V_2=\frac{1}{3}h_2\triangle ABC<\frac{4}{3}\triangle ABC=V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(3)这样的四面体也有两个,如图 5.10 所示,它们的体积也相等,记为 V_3.

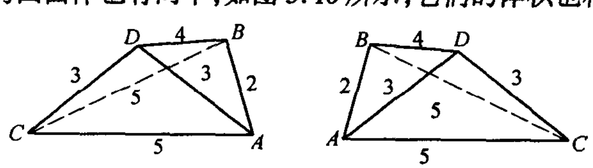


图 5.10

因 $2^2+5^2>5^2$, 故$\angle BAC$ 为锐角,即棱 AB 与平面 ACD 斜交,设 B 至底面 ACD 的高为 h_3, 则 $h_3<AB=2$. 故

$$V_3=\frac{1}{3}h_3\triangle ACD<\frac{2}{3}\triangle ACD=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{11}$$

因 $V_3^2=\frac{275}{36}$，$V_1^2=\frac{128}{9}$，故 $V_3<V_1$．所以，最大的体积为 $V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}$．

第 1 节　直线束截直线分线段比问题

经过一点的若干直线称为一组直线束．

定理　经过点 A 的直线 AB、AP、AC 截直线 l，与 l 分别交于 B、P、C，令 $\frac{BP}{PC}=\lambda$．

(1)若 $\angle BAP=\alpha$，$\angle CAP=\beta$，则

$$\lambda=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

(2)若直线束与另一条直线相截，与 AB、AP、AC 分别交于点 M、Q、N，令

$$\frac{BM}{MA}=P_1,\frac{CN}{NA}=P_2,\frac{PQ}{QA}=P$$

则①

$$\lambda=\frac{P_1-P}{P-P_2}$$

证明　如图 5.11，可得

$$(1)\lambda=\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC\cdot AP\sin\beta}=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

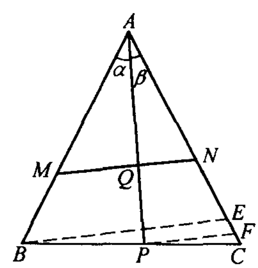


图 5.11

(2)过点 B、P 分别引 MN 的平行线，交 AC 于点 E、F．则

$$\lambda=\frac{BP}{PC}=\frac{EF}{FC}=\frac{FN-EN}{CN-FN}$$

即
$$\lambda(CN-FN)=FN-EN$$

亦即
$$(1+\lambda)FN=EN+\lambda CN$$

从而
$$(1+\lambda)\frac{FN}{NA}=\frac{EN}{NA}+\lambda\frac{CN}{NA}$$

又
$$\frac{EN}{NA}=\frac{BM}{MA}=P_1,\frac{FN}{NA}=\frac{PQ}{QA}=P$$

① 邹楼海．平几中的“分点坐标公式”及应用[J]．中学数学，1995(4)：46-48．

则 $$(1+\lambda)P=P_1+\lambda P_2$$

故 $$\lambda=\frac{P_1-P}{P-P_2}$$

注 (1)$\lambda=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$也可看做是三角形的分角线定理.特别地,当$\alpha=\beta$时,即为角平分线的性质.

(2)$\lambda=\frac{P_1-P}{P-P_2}$也可以写成$P=\frac{P_1+\lambda P_2}{1+\lambda}$,即为平面几何中的"分点坐标公式";又可以看做是直线束截平行线分线段成比例定理的推广;若当$P_1=P_2$时,则$P=P_1$,即为直线束截平行线分线段成比例定理;还可以有如下推论:若记

$$\frac{PA}{QA}=P',\frac{BA}{MA}=P'_1,\frac{CA}{NA}=P'_2$$

则 $$\lambda=\frac{P'_1-P'}{P'-P'_2},\quad P'=\frac{P'_1+\lambda P'_2}{1+\lambda}$$

例1[①] 设AD为$\triangle ABC$的中线,引任一直线CF交AD于E,交AB于F.求证:$AE\cdot FB=2AF\cdot ED$.

(1974年加拿大中学生笛卡尔数学竞赛试题)

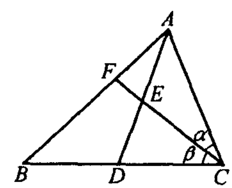


图5.12

证明 如图5.12,在$\triangle CAD$和$\triangle CAB$中,由定理可得

$$\frac{AE}{2ED}=\frac{CA\sin\alpha}{2CD\sin\beta}=\frac{CA\sin\alpha}{CB\sin\beta},\frac{AF}{FB}=\frac{CA\sin\alpha}{CB\sin\beta}$$

故 $$AE'\cdot FB=2AF\cdot ED$$

例2 如图5.13,$ABCD$为圆内接四边形,过AB上一点M,引MP、MQ、MR分别垂直于BC、CD、AD,联结PR与MQ相交于N,求证:$\frac{PN}{NR}=\frac{BM}{MA}$.

(1983年福建省中学生数学竞赛试题)

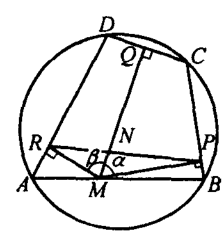


图5.13

证明 所设如图5.13,由A、B、C、D四点共圆,知

$$\angle A+\angle C=180^\circ$$

易得M、P、C、Q四点共圆,即$\alpha+\angle C=180^\circ$,故$\angle A=\alpha$,同理可得$\angle B=\beta$,又

$$MP=MB\sin B,MR=MA\sin A$$

---

① 陈梓人.三角形分角线定理在竞赛题中的应用[J].中学数学(江苏),1993(6):41-42.

在△MPR中,由定理得

$$\frac{PN}{NR}=\frac{MP\sin\alpha}{MR\sin\beta}=\frac{MB\sin B\sin\alpha}{MA\sin A\sin\beta}=\frac{MB}{MA}$$

例3　如图5.14,过△OAB的重心G的直线分别与AO、BO交于P、Q.记$OP=hOA$,$OQ=kOB$,$S_{\triangle OAB}=S$,$S_{\triangle OPQ}=T$.则:

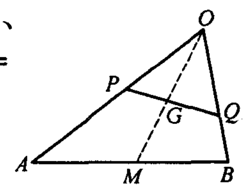


图5.14

(1)$\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3$.

(2)$\frac{4}{9}S\leqslant T\leqslant\frac{1}{2}S$.

证明　(1)设OG的延长线交AB于M,由

$$\frac{OM}{OG}=\frac{\frac{OA}{OP}+\lambda\cdot\frac{OB}{OQ}}{1+\lambda}$$

其中$\lambda=1$,知

$$\frac{OA}{OP}+\frac{OB}{OQ}=2\cdot\frac{OM}{OG}$$

因G为△OAB的重心,则$\frac{OM}{OG}=\frac{3}{2}$,故$\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3$.

(2)由

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3\Rightarrow k=\frac{h}{3h-1}$$

而

$$\frac{T}{S}=\frac{OP\cdot OQ}{OA\cdot OB}=kh$$

则

$$\frac{T}{S}=\frac{h^2}{3h-1}$$

由于

$$\left(\frac{T}{S}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{T}{S}-\frac{4}{9}\right)=\frac{(1-h)(1-2h)(3h-2)^2}{12(3h-1)^2}$$

再由

$$0\leqslant k\leqslant 1$$

知

$$0\leqslant\frac{h}{3h-1}\leqslant 1$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant h\leqslant 1$$

故

$$\left(\frac{T}{S}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{T}{S}-\frac{4}{9}\right)\leqslant 0$$

即

$$\frac{4}{9}S\leqslant T\leqslant\frac{1}{2}S$$

例4　在四边形$ABCD$中,$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle CBD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$.点$M$、$N$分别在

AC、CD 上，$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r$，且 B、M、N 共线．求证：M、N 分别为 AC、CD 的中点．

（1983 年全国联赛题）

证明　由已知可设

$$S_{\triangle ABD}=3k,S_{\triangle BCD}=4k,S_{\triangle ABC}=k,k>0$$

则

$$S_{\triangle ACD}=6k$$

从而

$$\lambda=\frac{DE}{EB}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=6,\frac{CE}{AC}=\frac{4}{7}$$

即

$$x=\frac{EC}{MC}=\frac{\frac{CE}{AC}}{\frac{MC}{AC}}=\frac{4}{7-7r},x_1=\frac{DC}{NC}=\frac{1}{r},x_2=1$$

由推论得

$$\frac{4}{7-7r}=\frac{\frac{1}{r}+6}{1+6}$$

即

$$6r^2-r-1=0$$

从而

$$r=\frac{1}{2}(r>0)$$

故 M、N 分别为 AC、CD 的中点．

例 5　如图 5.15，正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 上分别有一点 M 和 N，并且 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$．若 B、M、N 三点共线，求 r 的值．

（1992 年第 23 届国际数学奥林匹克试题）

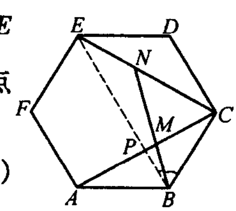


图 5.15

解法 1　联结 BE 交 AC 于 P．

设 $\angle CBN=\alpha$，$\angle EBN=\beta$，$BC=a$，$AC=CE=b$，由正六边形的性质易知，$BE=4BP$．由题设得 $AM=CN=rb$，则

$$CM=NE=(1-r)b,MP=\frac{1}{2}b-CM=(r-\frac{1}{2})b$$

在 $\triangle BCP$ 和 $\triangle BCE$ 中，由定理得

$$\frac{CM}{MP}=\frac{a\sin\alpha}{BP\sin\beta},\frac{NE}{CN}=\frac{BE\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{4BP\sin\beta}{a\sin\alpha}$$

两式相乘，得

$$\frac{CM}{MP}\cdot\frac{NE}{CN}=4$$

即
$$\frac{(1-r)b}{(r-\frac{1}{2})b}\cdot\frac{(1-r)b}{rb}=4$$

化简得 $r^2=\frac{1}{3}$,因 $r>0$,则 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法2　联结 BE 交 AC 于 P,令 $BC=1$,则 $BE=2$.在 Rt△CPB 中,知 $BP=\frac{1}{2}$,则 $\lambda=\frac{EP}{PB}=3$.由已知得

$$P_1=\frac{EN}{NC}=\frac{1-r}{r},P_2=0$$

$$P=\frac{PM}{MC}=\frac{CP}{MC}-1=\frac{1}{2-2r}-1$$

由定理得
$$\frac{1}{2-2r}-1=\frac{\frac{1-r}{r}}{1+3}$$

即
$$3r^2=1$$

故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$(因为 $r>0$).

注　从解题过程中可看出,正六边形的许多性质都未用到,因此原题可变形为:在四边形 $ABCD$ 中,P 是对角线交点,如图5.16所示,且 $AP=PC$,$BD=4BP$,M、N 分别在 AC、CD 上,且 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r$,若 B、M、N 三点共线,则 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

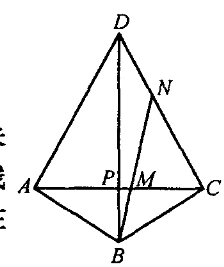


图5.16

练　习　题

1. O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点.AE 为 $\angle BAC$ 的平分线,交 BC 于 E.$DH\perp AE$ 于 H.交 AB 于 F,交 AC 于 G.求证:$BF=2OG$.

2. F 为 AC 的中点,D、E 分别为 BC 的三等分点,令 $BM=x$,$MN=y$,$NF=z$.求 $x:y:z$ 的值.

3. $AB=AC$,一直线与 AB 垂直,且与 AB、AC 及 BC 的延长线分别交于 F、E、D.若 $S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle DCE}$.则 $ED\cdot BC=AB\cdot EF$.

4. 设圆 O 是△ABC 的边 BC 外的旁切圆,D、E、F 分别是圆 O 与 BC、CA 和 AB 的切点.若 OD 与 EF 相交于 K,求证:AK 平分 BC.

5. 设 D 为等腰 Rt△ABC 的直角边 BC 的中点,E 在 AB 上,且 $AE:EB=2:$

1.求证:$CE\perp AD$.

6.在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是底边BC上一点,E在线段AD上,且$\angle BED=2\angle CED=\angle BAC$.求证:$BD=2CD$.

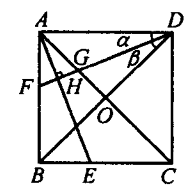
练习题解答

1.所设各角如图所示.

由AE平分$\angle BAC$及$DF\perp AE$知$AF=AG$.

在$\triangle DAB$和$\triangle DAO$中,由定理可得

$$\frac{AF}{BF}=\frac{DA\sin\alpha}{DB\sin\beta}=\frac{DA\sin\alpha}{2DO\sin\beta}$$

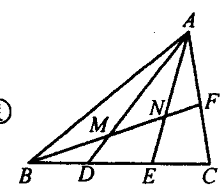


第1题

两式相除,并注意到$AF=AG$,得$\frac{OG}{BF}=\frac{1}{2}$,即$BF=2OG$.

2.如图,在$\triangle ABC$中由定理,有

$$\frac{FN}{NB}=\frac{\frac{CE}{EB}+0}{1+\frac{CF}{FA}}\Rightarrow\frac{z}{x+y}=\frac{1}{2} \quad ①$$



第2题

由

$$\frac{FM}{MB}=\frac{\frac{CD}{DB}+0}{1+\frac{CF}{FA}}$$

有

$$\frac{y+z}{x}=\frac{2}{3} \quad ②$$

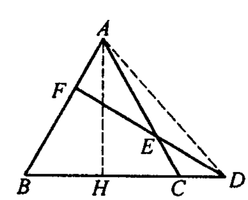
由①、②知$x=\frac{5}{2}z$,$y=\frac{3}{2}z$,故

$$x:y:z=\frac{5}{2}z:\frac{3}{2}z:z=5:3:2$$

3.设

$$AB=AC=b,BC=a$$
$$EA=p,EC=q,EF=x$$
$$ED=y,CD=m,AF=n$$

由$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle DFC}$,则$xp=2qy$,即



第3题

$$\frac{p}{q}=\frac{2y}{x} \quad ①$$

又 AH 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高，则

$$\mathrm{Rt}\triangle ABH \backsim \mathrm{Rt}\triangle DBF$$

即

$$\frac{1}{2}a:(b-n)=b:(a+m)$$

从而

$$\frac{2b}{a}=\frac{a+m}{b-n} \quad ②$$

在 $\triangle ABD$ 中，由定理，有

$$\frac{EC}{EA}=\frac{\frac{BF}{FA}+\frac{BC}{CD}\cdot 0}{1+\frac{BC}{CD}}$$

即

$$\frac{q}{p}=\frac{m(b-n)}{n(a+m)} \quad ③$$

由

$$\frac{EF}{ED}=\frac{0+\frac{FA}{FB}\cdot\frac{CB}{CD}}{1+\frac{FA}{FB}}$$

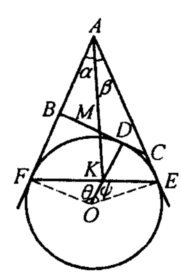
有

$$\frac{x}{y}=\frac{an}{mb} \quad ④$$

由①×②×③×④有 $\frac{bx}{ay}=\frac{ay}{bx}$，即 $ay=bx$，故

$$ED\cdot BC=AB\cdot EF$$

4. 联结 OE、OF，所设各角如图所示. 由题设易得 B、F、O、D 四点共圆. 则



第4题

$$\angle ABC=\angle FOD=\theta$$

同理

$$\angle ACB=\angle DOE=\psi$$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\psi}{\sin\theta}$$

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle OFE$ 中，由定理可得

$$\frac{FK}{KE}=\frac{AF\sin\alpha}{AE\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\frac{FK}{KE}=\frac{OF\sin\theta}{OE\sin\psi}=\frac{\sin\theta}{\sin\psi}$$

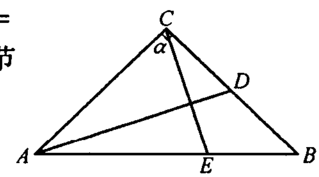
则
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\theta}{\sin\psi}$$

在$\triangle ABC$中,由定理可得

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}=\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1$$

故$BM=MC$,即AK平分BC.

5.设$\angle ACE=\alpha$,因为$\angle ACB=90°$,所以$\angle ECB=90°-\alpha$,如图所示,显然只须$\angle ADC=\alpha$即可,据本节定理,有



第5题

$$\frac{AE}{EB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

又
$$AE:EB=2:1=2$$

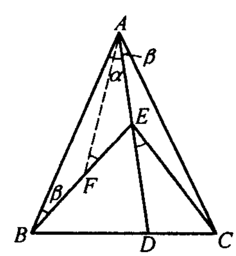
则
$$\tan\alpha=2$$

又D为BC的中点,$AC=BC=2CD$,于是,在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中,$\tan\angle ADC=\frac{AC}{CD}=2$,则$\tan\angle ADC=\tan\alpha$,即$\angle ADC=\alpha$(下略).

本例可作如下推广:

设D为等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的直角边BC上的任一点.E在AB上,若$AE:EB=AC:CD$,则$CE\perp AD$.(证明同上,此略)

6.如图,首先由$\angle BED=\angle BAC$,易知$\angle ABE=\angle DAC=\beta$,据本节定理及正弦定理得



第6题

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BE}{AE}$$

因此,欲证$BD=2CD$,只要证$BE=2AE$即可.

在BE上取F,使$BF=AE$,联结AF,则有$\triangle ABF\cong\triangle CAE$.则

$$\angle BAF=\angle ACE$$

又
$$\angle AFE=\angle BAF+\beta,\angle CED=\angle ACE+\beta$$

则
$$\angle AFE=\angle CED=\frac{1}{2}\angle BED=\angle EAF$$

即$\triangle EAF$是等腰的,故有$BE=2AE$.结论成立.

第2节　凸(凹)四边形的几个问题[①]

命题1　设 $ABCD$ 为圆的外切四边形,则 $AB+CD=BC+AD$.

命题2　设 $ABCD$ 为圆的内接四边形,则 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$.

以上关系式不仅是四边形存在内切圆(或外接圆)的必要条件,同时也是充分条件.

我们还可以再提出一种关系式,同样也是非梯形四边形具有内切圆的充要条件.

命题1′　设四边形 $ABCD$ 的对边在延长后相交,如图5.17所示,如果 $ABCD$ 是圆的外切四边形,则有 $KA+AM=KC+CM$ 或 $KD+BM=MD+KB$ 成立.反之,只要上述关系式之一得以成立,则 $ABCD$ 就是圆外切四边形.

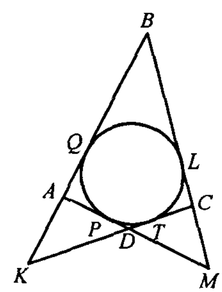


图5.17

(对于圆内接四边形也有相应类似的关系式,不过我们不再赘述.)

证明　必要性:利用切线长定理,有

$$KA+AM=KQ-AQ+AP+PM=KT+ML=$$
$$KC-CT+CL+MC=KC+CM$$

通常对充分性的证明采用反证法,但下面的方法似乎更能体现内切圆的特性:如图5.18所示,在 KC 上截取 $KE=KA$,而在 MB 上取 $MF=MA$.由等式

$$KA+AM=KC+CM$$

可得　$CF=MF-MC=MA-MC=KC-KA=EC$

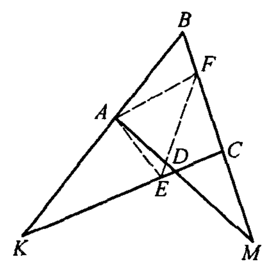


图5.18

这样由于 $KA=KE$, $MA=MF$, $CE=CF$, $\angle AKD$、$\angle AMB$ 及 $\angle BCD$ 的角平分线就是 AE、AF 及 FE 的垂直平分线,说明这些角平分线相交于一点——$\triangle AEF$ 的外接圆心处.该点对于 KB 与 KC, KC 与 BC, BC 与 AM 都是等距的,由此知该点与四边形 $ABCD$ 各边等距,且就是内切圆的圆心.

在证命题2的充分性时,先假定四边形 $ABCD$ 的对角和是相等的,不失一般性可约定 $\angle D<\angle C$, $\angle A<\angle B$.过点 C 及点 B 分别作直线,它们与 CD 边及 AB 边的夹角分别等于 $\angle D$ 及 $\angle C$,如图5.19所示.于是可得两个等腰的

① 孙维梓.内切圆与外接圆[J].中学教研(数学),1991(3):40-41.

△CMD($CM=MD$)及△ABK($AK=BK$).而△BEC也是等腰的($\angle CBE=\angle ABC-\angle BAD=\angle BCD-\angle CDA=\angle BCE$).这样,边$AB$、$BC$及$CD$的垂直平分线就都是△$MEK$的内角平分线,说明它们共点.该点与四边形的所有顶点又都是等距的,是四边形的外接圆心,同时也是△MEK的内切圆心.

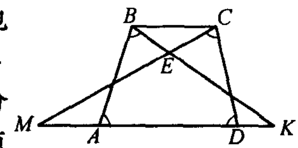


图 5.19

从以上证明看出,内切圆与外接圆确定有着密切相关的联系.

而当$ABCD$为梯形时,更有鲜明的特征.

命题 3 以AD及BC为底的梯形$ABCD$具有内切圆的充要条件是下列任一等式,即

(1)$TB+BP=DP$,$TC+AP=AD+CP$;

(这里的P是两腰延线的交点,T是D在直线BC上的投影)

(2)$\dfrac{AD}{BC}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$.

此命题的证明我们将留给读者自行完成.

下面再给出与上述命题相关的两个命题.

命题 4 设$ABCD$为圆外切四边形,那么△ABC及△CDA的内切圆是互切的.

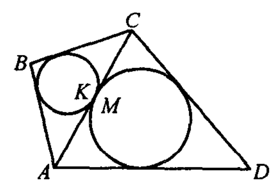


图 5.20

证明 设△ABC及△CDA的内切圆分别切AC于点K及M,如图5.20所示,我们只须证明K及M重合.事实上由切线长公式及命题1知

$$MK=|AM-AK|=|\frac{1}{2}(AK+AC-BC)-\frac{1}{2}(AC+AD-CD)|=$$

$$\frac{1}{2}|AB+CD-BC-AD|=0$$

证毕.

命题 5 过四边形$ABCD$的顶点A作平行于DC的直线,交直线BC于点B_1;又通过顶点C作平行于AB的直线,交AD于点D_1,试证明:

(1)如果$ABCD$是圆内接四边形,则AB_1CD_1也是圆内接四边形.

(2)如果$ABCD$是圆外切四边形,则AB_1CD_1也是圆外切四边形.

证明 由于(1)的证明十分简单,我们只证明(2),并只限于讨论$ABCD$为非梯形的情形.该直线AD及BC,AB及CD的交点分别为K及M.这时有两种可能,如图5.21(a)、(b)所示:设P为直线AB_1及CD_1的交点,在图5.21(a)的

情况下,有 $PA=CM$,$PC=AM$. 由于 $ABCD$ 是圆外切四边形,从命题1′的第一点可得

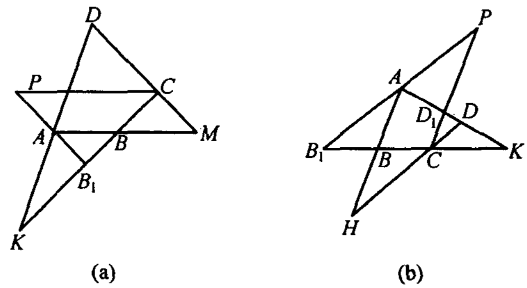


图5.21

$$KA+AM=KC+CM$$

把 AM 及 CM 代之以 PC 及 PA,就得

$$KA+PC=KC+PA$$

仍由命题1′知,四边形 AB_1CD_1 就是圆外切四边形. 在图5.21(b)中,由 $ABCD$ 出发,同样可知 AB_1CD_1 满足题设.

注 编译于前苏联《量子》1990年第8期.

命题6 设在凸四边形 $ABCD$ 中,令 $AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$DA=d$,则其面积 S 为

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

其中,$A=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$,a、b、c、d 是边长,p 是半周长,δ 和 β 是四边形的对角.

证明 设在四边形 $ABCD$ 中

$$AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$$

$$\angle ABC=\beta,\angle ADC=\delta$$

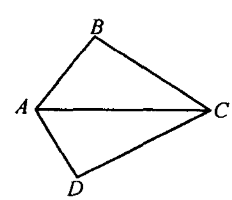


图5.22

(参阅图5.22). 由余弦定理,从 $\triangle ABC$ 得

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$$

从 $\triangle ADC$ 得 $\quad AC^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta$

使这两个表达式的右边相等,我们得到

$$a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\delta$$

即

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos\beta-2cd\cos\delta \qquad ①$$

我们把四边形 $ABCD$ 看做$\triangle ABC$ 面积与$\triangle ADC$ 面积之和来求,即

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\delta$$

从而得

$$4S=2ab\sin\beta+2cd\sin\delta \qquad ②$$

在等式①和②中,将两边平方,然后逐项相加得

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2=(2ab\cos\beta-2cd\cos\delta)^2+(2ab\sin\beta+2cd\sin\delta)^2$$

作等价变换后,得到

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

这个定理有一系列推论.

推论 1 圆内接任意四边形的面积按照下列公式计算,即

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

证明 考虑到圆内接四边形对角之和为 180°,即 $\beta+\delta=180°$,$\cos\frac{\beta+\delta}{2}=\cos 90°=0$,立即可得出证明.因此

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

推论 2 圆外切任意四边形的面积按照下列公式计算,即

$$S=\sqrt{abcd\sin^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

证明 因为在圆外切四边形中,对边的和相等,即

$$a+c=b+d$$

所以

$$p-a=c,p-b=d,p-c=a,p-d=b$$

我们有

$$S=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}=\sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}\right)}=\sqrt{abcd\sin^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

推论 3 内接于一个圆且外切于一个圆的四边形的面积可以按照公式 $S=\sqrt{abcd}$计算.

证明 因为 $a+c=b+d$ 和推论 1 得

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

所以

$$S=\left(\frac{c+d+b-a}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{a+b+d-c}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2c}{2}\cdot\frac{2d}{2}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2}}=\sqrt{abcd}$$

命题7　凸四边形为平行四边形的充要条件是凸四边形两对角线的平方和等于四条边的平方和.

证明　必要性:如图5.23,设 O 是▱$ABCD$ 两对角线的交点,则由斯特瓦尔特定理,知有

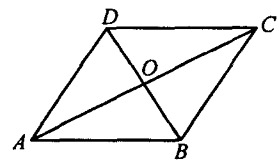


图5.23

$$AO^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AD^2-\frac{1}{4}BD^2$$

故
$$4AO^2+BD^2=2AB^2+AD^2$$

即
$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$

充分性:[1]设 AC、BD 为凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线,它们相交于 O,$OA=a$,$OB=b$,$OC=c$,$OD=d$,则由题意有

$$(a+c)^2+(b+d)^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \quad ①$$

设$\angle AOB=\alpha$,则由三角形的余弦定理得

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, BC^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$CD^2=c^2+d^2-2cd\cos\alpha, DA^2=d^2+a^2-2da\cos\alpha$$

将以上四式相加,得

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2(a-c)(b-d)\cos\alpha \quad ②$$

将②代入①,得

$$2ac+2bd=a^2+b^2+c^2+d^2+2(a-c)(b-d)\cos\alpha$$

所以

$$(a-c)^2+(b-d)^2+2(a-c)(b-d)\cos\alpha=0 \quad ③$$

令
$$f(a-c,b-d)=(a-c)^2+(b-d)^2+2(a-c)(b-d)\cos\alpha$$

则
$$f(a-c,b-d)\geqslant 2(a-c)(b-d)+2(a-c)(b-d)\cos\alpha$$

此处等号成立的充要条件是

$$a-c=b-d \quad ④$$

则

$$2(a-c)(b-d)+2(a-c)(b-d)(1+\cos\alpha)=0 \quad ⑤$$

因为
$$1+\cos\alpha>0$$

所以
$$2(a-c)(b-d)(1+\cos\alpha)=0$$

必有 $a-c$ 与 $b-d$ 至少有一个为0,不失一般性,令

$$a-c=0 \quad ⑥$$

由③、④、⑥得 $a=c$,$b=d$,所以,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

[1] 徐道.数学问题1601[J].数学通报,2006(4):63.

命题 8 梯形 $ABCD$ 中,点 E、F 分别在腰 AB、CD 上,$EF /\!/ AD$,$AE:EB=m:n$,求证:$(m+n)EF=mBC+nAD$.

证明 如图 5.24,过 E 作 CD 的平行线交 BC 于 P,交 AD 反向延长线于 Q,显然 $QPCD$ 是平行四边形,有

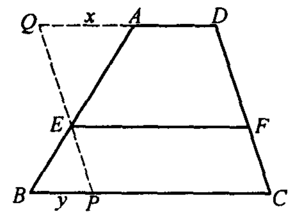


图 5.24

$$QD=PC \quad ①$$

令 $AQ=x$,$BP=y$,则 $\frac{x}{y}=\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$,即

$$y=\frac{n}{m}x \quad ②$$

由①得

$$x+AD=BC-y \quad ③$$

由②与③解得 x 得 $x=\frac{m(BC-AD)}{m+n}$,于是

$$EF=QD=x+AD=\frac{m(BC-AD)}{m+n}+AD=\frac{mBC+nAD}{m+n}$$

所以

$$(m+n)EF=mBC+nAD \quad ④$$

特别是,当 E、F 是 AB、CD 中点时,$m=n$,由式④可得

$$EF=\frac{AD+BC}{2}$$

这就是梯形中位线定理.由此可知,命题 8 是梯形中位线定理的引申.

命题 9 直线 l 分别截凸(凹)四边形 $ABCD$ 的边所在直线 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H,则

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

证明 若 $ABCD$ 为平行四边形,则由平行线性质即证.

若 $ABCD$ 不为平行四边形,设边 BC 与 AD 所在直线交于点 K,则对 $\triangle ABK$ 及截线 EFH,对 $\triangle DCK$ 及截线 GFH 分别应用梅涅劳斯定理,得两式即证得结论成立.

命题 10 凸(凹)四边形对角线相互垂直的充要条件是对边的平方和相等.

证明 如图 5.25,MN、PQ 分别是凸(凹)四边形 $PMQN$ 的两条对角线.

设 R、S、T、K、E、F 分别为 QN、NP、PM、MQ、PQ、MN 的中点,将这些中点联结,则 $KRST$、$RFTE$、$KFSE$ 均为平行四边形,从而由命题 7,有

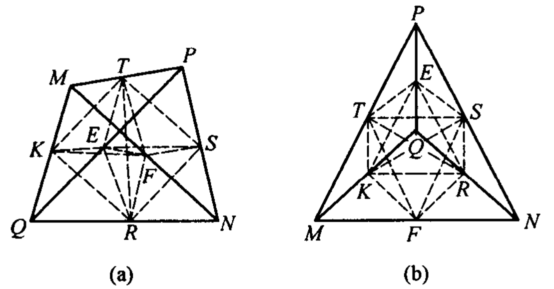


图 5.25

$$2(KF^2+KE^2)=EF^2+KS^2 \quad ①$$

$$2(ER^2+RF^2)=EF^2+RT^2 \quad ②$$

于是 $PM^2+QN^2=PN^2+QM^2 \Leftrightarrow 4KE^2+4KF^2=4ER^2+4RF^2 \Leftrightarrow$ 注意到①、②式有 $KS=RT \Leftrightarrow KRST$ 为矩形，即有 $KT\perp KR \Leftrightarrow$ 注意 $KT /\!/ PQ$，$KR /\!/ MN$，有 $MN\perp PQ$.

命题 11　一个凸四边形 $PQRS$ 内接于一个边长为 l 的正方形 $ABCD$，求证：四边形 $PQRS$ 必有一条边大于或等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}l$.

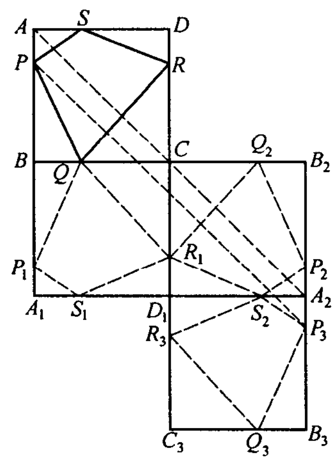


图 5.26

证明　如图 5.26，作正方形 $ABCD$ 关于 BC 的轴对称图形 A_1BCD_1，相应地得凸四边形 $PQRS$ 关于 BC 的轴对称图形 $P_1QR_1S_1$；再作 A_1BCD_1 关于 CD_1 的轴对称图形 $A_2B_2CD_1$，以及 $A_2B_2CD_1$ 关于 D_1A_2 的轴对称图形 $A_2B_3C_3D_1$，相应地得两四边形 $P_2Q_2R_1S_2$、$P_3Q_3R_3S_2$；联结 PP_3，AA_2．由

$$AA_2=2\sqrt{2}l,\ AP=A_2P_3$$

得

$$PP_3=AA_2=2\sqrt{2}l$$

则

$$PQ+QR+RS+SP=PQ+QR_1+R_1S_2+S_2P_3\geqslant PP_3=AA_2=2\sqrt{2}l$$

故 PQ、QR、RS、SP 四边中必有一条大于或等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}l$.

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，CD、BE 分别是 $\angle C$ 和 $\angle B$ 平分线，P 为 DE 上任意一点，$PQ\perp BC$ 于 Q，$PM\perp AB$ 于 M，$PN\perp AC$ 于 N．求证：$PQ=PM+PN$.

证明　如图 5.27，作 $DR\perp BC$ 于 R．$DK\perp AC$ 于 K．$ES\perp BC$ 于 S，$ET\perp AB$

于 T.则 $DR=DK,ES=ET$.

设 $\frac{DP}{PE}=\frac{m}{n}$,在梯形 $DRSE$ 中运用命题 8,得

$$(m+n)PQ=mES+nDR=mET+nDK \quad ①$$

由 $PM/\!/ET,DP:PE=m:n$,有

$$\frac{ET}{PM}=\frac{m+n}{m},ET=\frac{m+n}{m}PM \quad ②$$

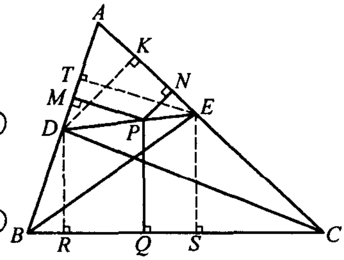


图 5.27

同理

$$DK=\frac{m+n}{n}PN \quad ③$$

以②、③代入①得

$$(m+n)PQ=m\cdot\frac{m+n}{m}PM+n\cdot\frac{m+n}{n}PN$$

故

$$PQ=PM+PN$$

注 如果 $\angle C=\angle B$,$DRSE$ 是矩形,命题 8 对矩形和平行四边形依然成立.

例 2 给出命题 11 的另证.

证明 如图 5.28,分别取 AB、BC、CD、DA 四边的中点 M_1、M_2、M_3、M_4,则 $M_1M_2M_3M_4$ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ 的正方形,设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心,联结 OM_1、OM_2、OM_3、OM_4、OP、OQ、OR、OS,则

$$OP\geqslant OM_1,OQ\geqslant OM_2,OR\geqslant OM_3,OS\geqslant OM_4$$

因为 $\angle POQ+\angle QOR+\angle ROS+\angle SOP=360°$,所以 $\angle POQ$、$\angle QOR$、$\angle ROS$、$\angle SOP$ 必有一个角不小于 $90°$,不妨设 $\angle POQ\geqslant 90°$.故

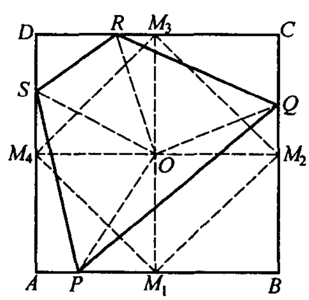


图 5.28

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\angle POQ\geqslant OP^2+OQ^2\geqslant$$
$$OM_1^2+OM_2^2=M_1M_2^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2$$

即 $PQ\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}l$.

第 6 章　1984 年试题的诠释

试题 A1　如图 6.1,在$\triangle ABC$中,P为边BC上任意一点,$PE /\!/ BA$,$PF /\!/ CA$.若$S_{\triangle ABC}=1$,证明:$S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$和$S_{\square PEAF}$中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$.

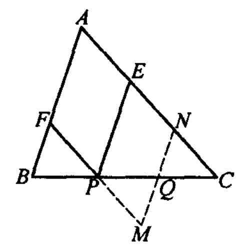


图 6.1

证法 1　易知$\triangle BPF \backsim \triangle PCE \backsim \triangle BCA$,相似三角形面积之比等于对应边长的平方之比,设$\frac{BP}{BC}=x$,则

$$\frac{PC}{BC}=1-x, 0<x<1$$

(1)当$0<x\leqslant\frac{1}{3}$时,$S_{\triangle PCE}=(1-x)^2\geqslant\frac{4}{9}$;同理,当$\frac{2}{3}\leqslant x<1$时,$S_{\triangle BPF}=x^2\geqslant\frac{4}{9}$.

(2)当$\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2}$时,可在$PC$上取点$Q$,使$PQ=BP$,过$Q$作$MN /\!/ AB$,分别交$FP$的延长线和$AC$于$M$、$N$,有

$$\frac{QC}{BC}=\frac{BC-2BP}{BC}=1-2x<\frac{1}{3} \quad ①$$

$$S_{\triangle QCN}=(1-2x)^2<\frac{1}{9},\quad S_{BQNA}>\frac{8}{9}$$

$$\triangle BPF \cong \triangle QPM \quad ②$$

$$S_{\square PEAF}=\frac{1}{2}S_{\square MNAF}=\frac{1}{2}S_{BQNA}>\frac{4}{9}$$

当$\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$时,可在$BP$上取点$Q$,使$QP=PC$,再用同法证出$S_{\square PEAF}>\frac{4}{9}$.

注　证明中的②,可改为:当$\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2}$时,在$PC$上取$Q$,使$PQ=BP$,过$Q$作$QN /\!/ BA$,交$AC$于$N$.则梯形$ABQN$的中位线为$PE$,并且它的高为$\square PEAF$的高的两倍,所以$S_{ABQN}=2S_{\square PEAF}$,其他证法相同.

证法 2 易知$\triangle BPF\backsim\triangle PCE\backsim\triangle BCA$,相似三角形面积之比等于对应边长之比的平方.设$\dfrac{BP}{BC}=x$,则

$$\frac{PC}{BC}=1-x,0<x<1$$

由$\triangle ABC=1$知

$$S_1=S_{\triangle BPF}=x^2,S_2=S_{\triangle PCE}=(1-x)^2$$

$$S_3=S_{\square PEAF}=1-S_{\triangle BPF}-S_{\triangle PCE}=2x(1-x)$$

(1)当$0<x\leqslant\dfrac{1}{3}$时,$S_2\geqslant\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$;

(2)当$\dfrac{2}{3}\leqslant x<1$时,$S_1\geqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$;

(3)当$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$时

$$S_3=2x(1-x)=2\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]>2\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{4}{9}$$

注 上述证法在算出$S_1=x^2,S_2=(1-x)^2,S_3=2x(1-x)$之后,可采用反证法:若结论不成立,则有

$$S_1=x^2<\frac{4}{9},S_2=(1-x)^2<\frac{4}{9},S_3=2x(1-x)<\frac{4}{9}$$

同时成立.

解不等式知x应同时满足

$$0<x<\frac{2}{3},\frac{1}{3}<x<1,0<x<\frac{1}{3}\text{或}\frac{2}{3}<x<1$$

这是不可能的,故S_1、S_2、S_3中至少有一个大于等于$\dfrac{4}{9}$.

证法 3 如图 6.2,设$BM=MN=NC=\dfrac{1}{3}BC$.过N作$NK/\!/AB$,$NL/\!/AC$,易知$S_{\triangle NCK}=\dfrac{1}{9}$,$S_{\triangle BNL}=\dfrac{4}{9}$,从而$S_{\square NKAL}=\dfrac{4}{9}$,当$P$在$NC$上时,$S_{\triangle BPF}\geqslant S_{\triangle BNL}=\dfrac{4}{9}$;同理,当$P$在$BM$上时,$S_{\triangle PCE}\geqslant\dfrac{4}{9}$.

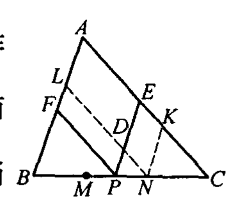


图 6.2

因此,只要考虑P在线段MN上的情形.从$PE/\!/NK/\!/BA$和$PF/\!/NL/\!/CA$可得出

(i)$\triangle PND \backsim \triangle BCA$，设相似比为 k，即

$$PD = kBA, ND = kCA$$

(ii) $$PF \geqslant \frac{1}{3}CA, NK \geqslant \frac{1}{3}BA$$

(iii)平行四边形 $PDLF$ 和 $NKED$ 对应角相等，故

$$\frac{S_{\square PDLK}}{S_{\square NKED}} = \frac{PD \cdot PF}{NK \cdot ND} = \frac{k \cdot BA \cdot PF}{\frac{1}{3}BA \cdot k \cdot CA} \geqslant 1$$

由此知 $$S_{\square PEAF} > S_{\square NKAL} = \frac{4}{9}$$

证法 4 如图 6.2，同证法 3，把 BC 等分为三等份，M、N 是分点. 显然，当 P 落在 BM 或 NC 上时，$S_{\triangle PCE}$或 $S_{\triangle BPF} \geqslant \frac{4}{9}$.

故只须考虑点 P 落在 MN 内的情形. 设

$$\frac{BP}{BC} = x, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

则 $$\frac{AE}{AC} = x, \frac{AF}{AB} = 1 - x$$

于是 $$\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 > \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

故 $$S_{\square AFPE} = 2S_{\triangle AFE} > \frac{2}{9}$$

证法 5 如图 6.3，作$\triangle ABC$ 的剖分(A_1、A_2，B_1、B_2，C_1、C_2 均为所在边的三等分点)，这时每一个小三角形的面积均等于 1/9.

很明显，如果点 P 在线段 BA_1 上变动时，$\triangle PCE$ 完整地盖住了其中四个小三角形，因此 $S_{\triangle PCE} \geqslant 4/9$. 对称地，如果点 P 落在线段 A_2C 上，则 $S_{\triangle BPF} \geqslant 4/9$.

余下只须讨论点 P 在线段 A_1A_2 内变动的情形，利用平行线的最基本的性质可证：$\triangle FC_2I \cong \triangle MA_1P \cong \triangle NJG$，这说明图 6.3 中画了斜线条的两个三角形有相等的面积.

又因为$\triangle EJB_2 \cong \triangle NPA_2 \cong \triangle MGI$，这说明图 6.3 中画了方格的两个三角形面积相等.

将四边形 $AFPE$ 中$\triangle NJG$ 剪下来再拼到$\triangle FC_2I$ 上；把$\triangle MGI$ 剪下来再拼到$\triangle EJB_2$ 上，我们看出

$$S_{AFPE}=S_{\triangle AB_2C_2}+S_{GMPN}=\frac{4}{9}+S_{GMPN}\geqslant\frac{4}{9}$$

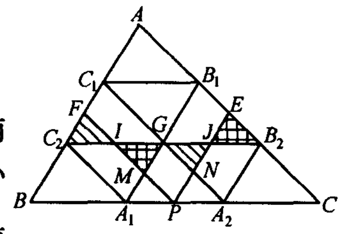


图 6.3

证法6 如图6.4,作平行四边形 $ABDC$,用两组平行于 AB 及 BD 的直线把它分成9个全等的小平行四边形,它们每个的面积都是 $\frac{2}{9}$,设 A_1、A_2 是 BC 的三等分点,Q 是 BC 的中点.由对称性分两种情况.

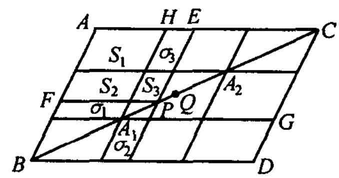


图 6.4

(1)若 P 在 BA_1 上,则

$$S_{\triangle PEC}\geqslant S_{\triangle A_1HC}=\frac{1}{2}S_{\square A_1GCH}=\frac{4}{9}$$

(2)若 P 在 A_1Q 上,则由图6.4中 $S_{\sigma_1}=S_{\sigma_2}=S_{\sigma_3}$ 有

$$S_{\square PEAF}=S_1+S_2+S_3+S_{\sigma_3}=S_1+(S_2+S_{\sigma_1})+S_3=\frac{4}{9}+S_3>\frac{4}{9}$$

证毕.

证法7 设 $BP=x$,$BC=a$.因 $PE\parallel BA$,$PF\parallel CA$,则

$$y_1=\frac{S_{\triangle BPF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{x^2}{a^2},y_2=\frac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(a-x)^2}{a^2},y_3=\frac{S_{\square PEAF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2ax-2x^2}{a^2}$$

令

$$u=y_1y_2y_3=\frac{2x^3(a-x)^3}{a^6}$$

则

$$\sqrt[3]{2}x^2-\sqrt[3]{2}ax+a^2\sqrt[3]{u}=0$$

因 x 是实数,则

$$\Delta=(-\sqrt[3]{2}a)^2-4\sqrt[3]{2}\cdot a^2\sqrt[3]{u}\geqslant 0,u\leqslant\frac{1}{32}$$

即

$$y_1y_2y_3\leqslant\frac{1}{32} \quad ①$$

又

$$y_1+y_2+y_3=1 \quad ②$$

由②当 $y_1=y_2=y_3=3/9$ 时,$y_1y_2y_3$ 的最大值是 1/27 与①矛盾,故 y_1、y_2、y_3 必有两数不等.那么要同时满足①、②成立,则 y_1、y_2、y_3 中至少有一个在$(0,\frac{1}{9}]$

内,或者有两个在$[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]$内,或者有一个在$[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]$内.不管哪种情况,都至少有一个大于等于$\frac{4}{9}$.故命题得证.

注 此题可以看做是1969年第1届加拿大数学奥林匹克题改编而来.

题目 设$\triangle ABC$是等腰直角三角形,它的腰长是1,P是斜边上一点,由P到其他两边的垂足是Q和R,考虑$\triangle APQ$和$\triangle PBR$的面积,以及矩形$PQCR$的面积.证明:无论P怎样选取,这三个面积中最大的至少是$\frac{2}{9}$.

事实上,此题中的$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}$,恰为试题A1中的面积的一半.

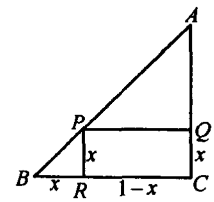


图6.5

也可设$BR=x$,则

$$BR=RP=QC=x,RC=PQ=AQ=1-x$$

(1)如果$x\geqslant\frac{2}{3}$,则

$$S_{\triangle BRP}=\frac{x^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

(2)如果$x\leqslant\frac{1}{3}$,则$1-x\geqslant\frac{2}{3}$,则

$$S_{\triangle APQ}=\frac{(1-x)^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

(3)如果$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$,则$-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{6}$,则

$$S_{PQCR}=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>-\frac{1}{36}+\frac{1}{4}=\frac{2}{9}$$

因此,$\triangle BRP$、$\triangle APQ$和矩形$PQCR$的面积中至少有一个不小于$\frac{2}{9}$.

第1节 三角形的与其边平行的内接平行四边形问题

三角形的与其边平行的内接平行四边形图形,有如下有趣的性质.

定理1 设$\square EPQF$内接于$\triangle ABC$,PQ在BC边上,令$\triangle AEF$、$\triangle BPE$、$\triangle QCF$的面积分别为S_1、S_2、S_3,则$\square EPQF$的面积S满足

$$S=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)} \quad ①$$

证明 如图6.6,过点E作$ED /\!/ AC$交BC于点D,则$S_{\square EDCF}=S_{\square EPQF}=$

S,且 $S_{\triangle EPD}=S_{\triangle FQC}=S_3$,由$\triangle EBD$ 与$\square EDCF$ 等高,则知

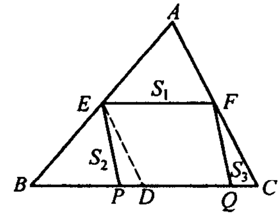


图 6.6

$$\frac{S_2+S_3}{\frac{1}{2}S}=\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{EF}$$

又由$\triangle AEF$ 与$\square EDCF$ 等高,则知

$$\frac{\frac{1}{2}S}{S_1}=\frac{CF}{FA}$$

注意到 $EF/\!/BC$,有$\frac{CF}{FA}=\frac{BE}{EA}$,及 $ED/\!/AC$,有$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{EF}$,从而$\frac{BD}{EF}=\frac{CF}{FA}$,即

$$\frac{S_2+S_3}{\frac{1}{2}S}=\frac{\frac{1}{2}S}{S_1}$$

亦即 $$S=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$$

推论 在定理 1 的条件下,有

$$S\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC} \qquad ②$$

证明 由式①,有 $S=2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}$,即

$$\sqrt{S_1}\sqrt{S_2+S_3}=\frac{1}{2}S$$

又由 $$S_{\triangle ABC}=S_1+(S_2+S_3)+2\sqrt{S_1(S_2+S_3)}=(\sqrt{S_1}\sqrt{S_2+S_3})^2$$

有 $$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2+S_3}=\sqrt{S_{\triangle ABC}}$$

可视$\sqrt{S_1}$、$\sqrt{S_2+S_3}$是方程 $x^2-\sqrt{S_{\triangle ABC}}x+\frac{1}{2}S=0$ 的两根,则由

$$\Delta=(\sqrt{S_{\triangle ABC}})^2-4\cdot\frac{1}{2}S\geqslant0$$

得 $$S\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

注 此推论即为 1989 年湖北黄冈地区初中数学竞赛试题:如图 6.7 所示,已知$\square MNPQ$ 的一边 PQ 在$\triangle ABC$ 的边 BC 上,另两个顶点 M、N 分别在 AB、AC 上,求证:$\square MNPQ$ 的面积不大于$\triangle ABC$ 的面积的一半.

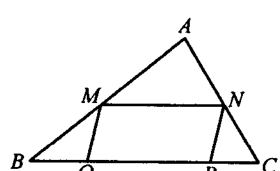


图 6.7

在图 6.6 中,若 $S_3=0$,则内接四边形有两条边在

三角形的边上或有两条边分别平行于三角形的两边.此时,即为本节前面的试题A1中的情形.对于这个图形,我们除了得出 $S=2\sqrt{S_1S_2}$ 外,还有如下的结论:

定理2　如图6.8,设点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上,$EP /\!/ AC$ 交 AB 于 E,$EF /\!/ BC$ 交 AC 于 F.令 S_i、P_i、R_i、$r_i(i=0,1,2)$ 分别表示 $\triangle ABC$、$\triangle AEF$、$\triangle EBP$ 的面积、周长、外接圆半径、内切圆半径,又令 λ_1、λ_2 分别为 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$,$\triangle EBP \backsim \triangle ABC$ 的相似比,则

(1) $\lambda_1+\lambda_2=1$,其中 $\frac{EF}{BC}+\frac{EP}{AC}=1$ 最常用.

(2) $S_0=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

(3) $P_0=P_1+P_2$.

(4) $R_0=R_1+R_2$.

(5) $r_0=r_1+r_2$.

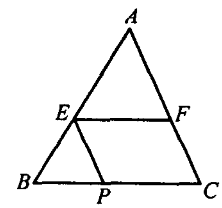


图6.8

证明　(1) $\frac{EF}{BC}+\frac{EP}{AC}=\frac{PC}{BC}+\frac{BP}{BC}=\frac{AF}{AC}+\frac{FC}{AC}=$

$$\frac{AE}{AB}+\frac{EB}{AB}=\lambda_1+\lambda_2=1$$

(2)由 $S_0=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ 即证.

(3)由 $\frac{P_1}{P_0}+\frac{P_2}{P_0}=\lambda_1+\lambda_2=1$,即 $P_0=P_1+P_2$.

(4)、(5)的证明同(3).

下面举例说明定理的应用.

例1　如图6.9,过 $\triangle ABC$ 内一定点 P,作 $DE /\!/ BC$,$PG /\!/ AC$,$HK /\!/ AB$.则 $(DE/BC)+(FG/AC)+(HK/AB)$ 的值等于多少?

(浙江温州市1987年初中数学竞赛题)

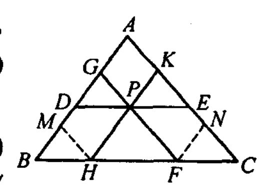


图6.9

解　过点 H 作 $HM /\!/ AC$ 交 AB 于 M,过点 F 作 $FN /\!/ AB$ 交 AC 于 N,由定理2(1)得

$$(HK/AB)+(HM/AC)=1,(FG/AC)+(FN/AB)=1$$

故 $(HK/AB)+(BH/BC)=1,(FG/AC)+(CF/BC)=1$

两式相加,又 $DE=BH+CF$,于是

$$(DE/BC)+(FG/AC)+(HK/AB)=2$$

例2　如图6.10,正方形 $OPQR$ 内接于 $\triangle ABC$,已知 $\triangle AOR$、$\triangle BOP$、$\triangle CQR$ 的面积分别是 $S_1=1$、$S_2=3$、$S_3=1$,那么正方形 $OPQR$ 的边长是(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

(1991年全国初中数学联赛题)

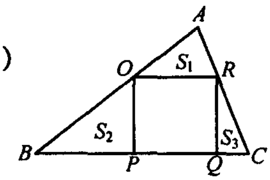


图6.10

解　选C.由定理1,知

$$S = 2\sqrt{S_1(S_2+S_3)} = 2\sqrt{1\cdot(3+1)} = 4$$

故正方形边长为2.

例3　如图6.11,P是$\triangle ABC$内一点,过P分别作直线平行于$\triangle ABC$的各边,得到3个三角形和3个平行四边形,记面积分为s_i与t_i,$i=1,2,3$.

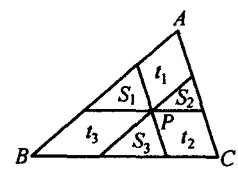


图6.11

(1)已知:$s_1=4,s_2=9,s_3=49$,求$S_{\triangle ABC}$.

(2)已知t_1、t_2、t_3,求$S_{\triangle ABC}$.

(3)已知$t_1=2,t_2=3,t_3=4$,求$S_{\triangle ABC}$.

(4)求证:$s_1+s_2+s_3 \geqslant \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

解　(1)三次运用定理1,依次求得$t_1=12,t_2=28,t_3=42$.所以

$$S_{\triangle ABC} = 4+9+49+12+28+42 = 144$$

(2)应用(1)列出一个三元方程组,即

$$t_1^2 = 4s_1s_2,\ t_2^2 = 4s_2s_3,\ t_3^2 = 4s_1s_3$$

求得

$$s_1 = \frac{t_1t_3}{2t_2},\ s_2 = \frac{t_1t_2}{2t_3},\ s_3 = \frac{t_2t_3}{2t_1}$$

故

$$S_{\triangle ABC} = t_1+t_2+t_3+\frac{t_2t_3}{2t_1}+\frac{t_1t_3}{2t_2}+\frac{t_1t_2}{2t_3} \quad ①$$

(3)把$t_1=2,t_2=3,t_3=4$代入式①求得$S_{\triangle ABC}=14\frac{1}{2}$.

(4)因$t_1=2\sqrt{s_1s_2}\leqslant s_1+s_2,t_2\leqslant s_2+s_3,t_3\leqslant s_1+s_3$,则

$$t_1+t_2+t_3 \leqslant 2(s_1+s_2+s_3)$$

又由

$$t_1+t_2+t_3 = S_{\triangle ABC}(s_1+s_2+s_3) \leqslant 2(s_1+s_2+s_3)$$

故

$$s_1+s_2+s_3 \geqslant \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

例4　如图6.12,在$\triangle ABC$中,P为边BC上任意一点,$PE /\!/ BA$,$PF /\!/ CA$,若$S_{\triangle ABC}=1$,证明:$S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$.

证明　因

$$s_3^2 = 4s_1s_2 \quad ①$$

$$s_1+s_2+s_3 = 1 \quad ②$$

设 $s_3=2s_1q,q>0$,则 $s_2=s_1q^2$,则

$$s_1+s_1q^2+2s_1q=1$$

$$s_1=\frac{1}{(q+1)^2},s_2=\frac{q^2}{(q+1)^2},s_3=\frac{2q}{(q+1)^2}$$

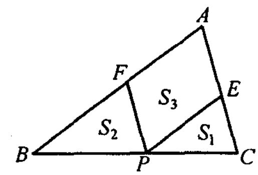


图 6.12

假设 s_1、s_2、s_3 均小于$\frac{4}{9}$,则

$$\frac{1}{(q+1)^2}<\frac{4}{9},\frac{q^2}{(q+1)^2}<\frac{4}{9},\frac{2q}{(q+1)^2}<\frac{4}{9}$$

依次解得 $q>\frac{1}{2}$,$q<2$,$q>2$ 或 $q<\frac{1}{2}$.显然这三个不等式无解,故假设不成立.因此 s_1、s_2、s_3 中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$.

练　习　题

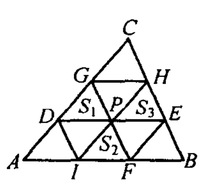
1.如图,P 为$\triangle ABC$ 内一点,过 P 作 DE、FG、HI 分别平行于 AB、BC、CA,交点如图所示.记$\triangle ABC$、$\triangle PGD$、$\triangle FPI$、$\triangle EHP$ 的面积分别为 S、S_1、S_2、S_3,求证:$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

2.如图,已知$\triangle ABC$ 的面积为 S,作一直线 $l/\!/BC$,且与 AB、AC 分别交于 D、E 两点,记$\triangle BED$ 的面积为 k,证明 $k\leqslant\frac{S}{4}$.

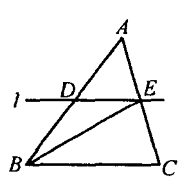
(第二届"祖冲之杯"初中数学邀请赛题)

3.在$\triangle ABC$ 中,$AB=425$,$BC=450$,$CA=510$.如图所示,P 为$\triangle ABC$ 内一点,线段 DE、FG 和 HI 的长均为 d 并交于点 P,且分别平行于 AB、BC 和 CA,求 d.

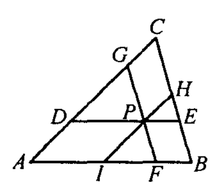
(第四届美国数学邀请赛题)



第1题



第2题



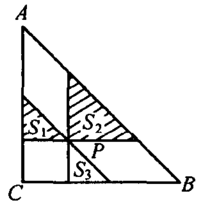
第3题

4.如图,已知在直角边为1的等腰 Rt$\triangle ABC$ 中任取点 P,过 P 分别引三边的平行线围成了以 P 为顶点的三个三角形,求这三个三角形面积和的最小值,

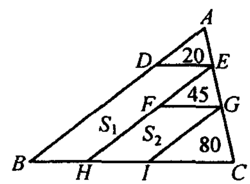
以及达到最小值时 P 的位置.

5. 如图,在$\triangle ABC$中,$DE \parallel FG \parallel BC$,$GI \parallel EF \parallel AB$,若$\triangle ADE$、$\triangle EFG$、$\triangle GIC$的面积分别为 20 cm²、45 cm²、80 cm²,求$\triangle ABC$的面积.

(1992 年江苏初中竞赛题)



第 4 题



第 5 题

练习题解答

1. 由定理 1 知

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1S_2} + 2\sqrt{S_2S_3} + 2\sqrt{S_1S_3} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

2. 过 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于 F,记 $S_{\triangle ADE} = S_1$,$S_{\triangle CEF} = S_2$,$S_{\square DEFB} = 2k$,则

$$S_1 + S_2 = S - 2k, 4S_1S_2 = (2k)^2, S_1S_2 = k^2$$

那么 S_1、S_2 是方程 $x^2 - (S - 2k)x + k^2 = 0$ 两实根,即

$$\Delta = (S - 2k)^2 - 4k^2 \geqslant 0, k \leqslant \frac{1}{4}S$$

或者过 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于 F,由定理 1 推论得

$$k = \frac{1}{2}S_{\square BFED} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}S$$

3. 由例 1 知

$$\frac{d}{BC} + \frac{d}{AC} + \frac{d}{AB} = 2$$

则

$$d = 2\left(\frac{1}{425} + \frac{1}{450} + \frac{1}{510}\right)^{-1} = 306$$

4. 由例 3(4)结论知

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqslant \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{6}$$

当且仅当

$$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{18}$$

时,取等号,故三个三角形面积和的最小值是$\frac{1}{6}$,这时 P 使这三个三角形面积相等且为$\frac{1}{18}$.

5.设 $S_{\square BDEH}=S_1, S_{\square FGIH}=S_2$,在$\triangle CEH$中,由定理1得

$$S_2^2=4\times45\times80, S_2=120$$

$$S_{\triangle CEH}=45+80+120=245$$

在$\triangle ABC$中

$$S_1^2=4\times20\times245, S_1=140$$

故

$$S_{\triangle ABC}=140+245+20=405\ (\mathrm{cm}^2)$$

第2节　三角形平行剖分图性质与三角形剖分问题

过$\triangle ABC$内任一点引三边的平行线所构成的图形叫做三角形平行剖分图.

三角形平行剖分图有一系列有趣性质.①

首先约定 a、b、c 为点 A、B、C 的对边;记 BS、SR、RC、CW、WV、VA、AU、UT、TB 分别为 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3;$S_{\triangle ABC}$、$S_{\triangle RSP}$、$S_{\triangle TUP}$、$S_{\triangle WVP}$分别为 S、S_1、S_2、S_3;WT、RU、SV 分别为 a'、b'、c'.

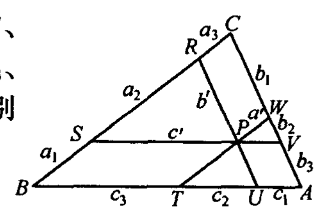


图 6.13

性质1　$\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c}=1$.

证明　由$\triangle RSP\backsim\triangle ABC$,则

$$\frac{a_2}{a}=\frac{SP}{c}=\frac{c_3}{c}$$

同理

$$\triangle WVP\backsim\triangle ABC$$

则

$$\frac{b_2}{b}=\frac{PV}{c}=\frac{c_1}{c}$$

故

$$\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c}=\frac{c_3}{c}+\frac{c_1}{c}+\frac{c_2}{c}=1$$

性质2　$a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$.

证明　经过平移,则带阴影的三个三角形的边长如图6.14所示.

由$\triangle RSP\backsim\triangle PTU$和$\triangle PTU\backsim\triangle WPV$,得

① 蒋力.平行剖分图及其性质[J].中学生数学,1993(5):26-27.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_1}{b_3},\frac{b_3}{b_2}=\frac{c_2}{c_1}$$

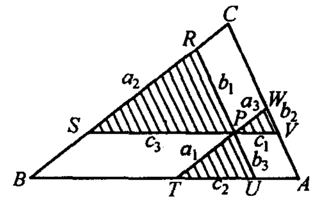


图 6.14

则 $$a_1b_1c_1=\left(\frac{a_2b_3}{b_1}\right)b_1c_1=a_2b_3c_1=a_2\left(\frac{b_2c_2}{c_1}\right)c_1=a_2b_2c_2$$

同理可证 $$a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$$

故 $$a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$$

性质 3 $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=2.$

证明 如图 6.15,由$\triangle AWT\backsim\triangle ACB$,得

$$\frac{a'}{a}=\frac{c_1+c_2}{c}$$

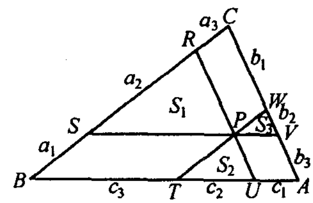


图 6.15

同理可得 $$\frac{b'}{b}=\frac{c_2+c_3}{c}$$

而由平移知 $c'=c_3+c_1$,即

$$\frac{c'}{c}=\frac{c_3+c_1}{c}$$

故 $$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=\frac{c_1+c_2}{c}+\frac{c_2+c_3}{c}+\frac{c_3+c_1}{c}=2$$

推论 若 $a'=b'=c'=d$,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{d}$$

性质 4 $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$

证明 应用性质 1 证,由$\triangle RSP\backsim\triangle CBA$,得$\frac{S_1}{S}=\frac{a_2^2}{a^2}$,即

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{a_2}{a^2}$$

同理可得

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{c_2}{c},\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{b_2}{b}$$

则 $$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c}=1$$

故 $$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$$

性质 5 平行剖分图中三个平行四边形的对角线交点所组成的三角形与

原三角形位似,相似比为 1∶2,位似中心为 P,如图 6.16所示.

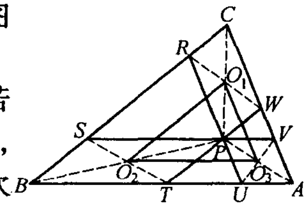


图 6.16

这个性质很简单,请读者自证.值得一提的是,若按此方法继续作下去,所得三角形均与△ABC 位似,位似中心均为 P,作第 n 次时,所得三角形三边依次是$\frac{a}{2^n}$,$\frac{b}{2^n}$,$\frac{c}{2^n}$.

三角形的剖分问题可分为如下几个方面.①

1.关于内点剖分三角形的计数问题

命题 1　以三角形 3 个顶点和它内部的 n 个点共 $n+3$ 个点的连线,能把原三角形分割成 $2n+1$ 个不重叠的小三角形.

证明　为了计算分割后小三角形的个数,我们先来求这些小三角形的所有内角和.三角形内 n 个点中的每一个点都是分割后所得的小三角形中若干个公共的顶点,这些小三角形中以该点为顶点的内角之和为 360°,又原三角形的每一个顶点也都是这些小三角形中若干个公共的顶点,故小三角形中以原三角形的三个顶点为顶点的内角和为 180°,所以,分割后所得的三角形的所有内角和为 $n\cdot 360°+180°$,故这些小三角形的总个数为

$$\frac{n\cdot 360°+180°}{180°}=2n+1(\text{个})$$

2.关于三角形的 n 次剖分的计数问题

用三组平行于边的等距平行线,将三角形三边分别 n 等份,这样就把原三角形分成了许多全等的小三角形,我们称这样的分割为 n 次剖分.

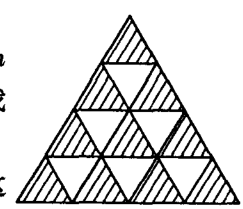


图 6.17

为了确切起见,先看一种简单的情形,取 $n=4$,则在这种剖分中,被涂成阴影的三角形叫做向上三角形,共有 10 个;没有阴影的三角形叫做向下三角形,共有 6 个.不论是向上三角形还是向下三角形,彼此都是全等的,总共有 $4^2=16$ 个.一般地,有:

命题 2　n 次剖分后,所有全等的小三角形共有 n^2 个.

证明　n 次剖分后,向上三角形共有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\text{个})$$

---

① 南秀全.三角形的剖分及其应用[J].中学数学,1992(3):44-47.

向下三角形共有

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}(个)$$

这两类三角形共有

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2(个)$$

命题 3 将边长为 n 的等边三角形进行 n 次剖分后,所有三角形的总个数是:

(1)当 n 为奇数(即 $n=2k-1$)时,$S_n=\frac{1}{8}[n(n+2)(2n+1)-1]$.

(2)当 n 为偶数(即 $n=2k$)时,$S_n=\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)$.

证明 记边长为 $k(1\leqslant k\leqslant n)$的向上三角形的个数为 x_k,边长为 $l(1\leqslant l\leqslant [\frac{n}{2}])$的向下三角形个数为 y_l,则向上的三角形共有

$$x_1=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_1=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$x_3=1+2+\cdots+(n-2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}=1+2$$

$$x_n=1$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

下面计算向下三角形的个数,即

$$y_1=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$y_2=1+2+\cdots+(n-3)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$y_3=1+2+\cdots+(n-5)=\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

$$\vdots$$

$$y_l=1+2+\cdots+(n-2l+1)=\frac{1}{2}(n-2l+1)(n-2l+2)$$

$(l=1,2,\cdots,[\frac{n}{2}])$其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

下面为了计算 $\sum_{i=1}^{[n/2]} y_i$，需要分两种情形.

(1)当 $n=2k(k\in\mathbf{N})$时，由上式知

$$\sum_{i=1}^{[n/2]} y_i=\sum_{i=1}^{k}[(2k^2+3k+1)+2l^2-(4k+3)l]=$$

$$\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)=\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)$$

(2)当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N})$时

$$\sum_{i=1}^{[n/2]} y_l=\sum_{i=1}^{k+1} y_i=\frac{1}{6}k(k-1)(4k+1)=\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)$$

故

$$S_n=\begin{cases}\frac{1}{8}[n(n+2)(2n+1)-1] & ,\text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) & ,\text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

命题4 试求出所有能使得正三角形被分割成 n 个等腰三角形的正整数 n $(n\geqslant 2)$.

解 假设 $n=2$ 时能分割，则分割线必过正三角形的一个顶点.由于有一个角为60°的等腰三角形必是正三角形，所以该正三角形就被分割成两个小正三角形，但这是不可能的.故 $n=2$ 时不能分割.

从图6.18不难看出 $n=3,4,5$ 时能分割.

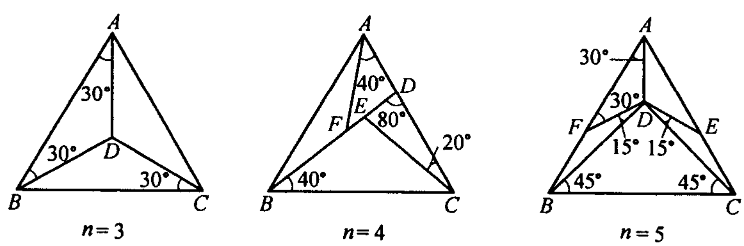


图6.18

注意到等腰直角三角形的斜边上的高线，把它自身分割成两个小等腰直角三角形，并且可以一直分割下去，每分割一次就增加一个等腰直角三角形，从而由下面 $n=5$ 的分割图形(其中有一个等腰直角三角形)可知，对于一切 $n\geqslant 6$ 的正三角形都能分割.

故所求的 n 是大于2的所有正整数.

下面看几道应用的例子.

例1 过三角形的重心任作一直线，把这个三角形分成两部分，证明：这两

部分面积之差不大于整个三角形面积的$\frac{1}{9}$.

(1978 年安徽省中学数学竞赛题)

证明 将$\triangle ABC$三次剖分,易知图 6.19 中的 G 就是$\triangle ABC$ 的重心,如果过 G 作的直线正好是某条剖分线,这时两部分面积之差正好是一个小三角形的面积,即$\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{9}$.

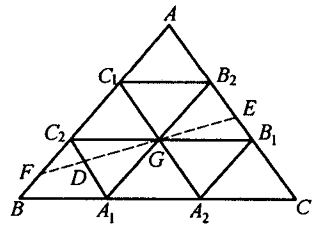


图 6.19

现设过 G 的直线是图 6.19 中虚线,显然$\triangle GC_2D \cong \triangle GB_1E$.于是经过面积的割补之后,这两部分面积之差正好等于$|S_{\triangle C_2FD} - S_{FDA_1B}|$,这个数值显然不会超过一个小三角形的面积,即$\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

例 2 P 为$\triangle ABC$ 内任一点,AP、BP、CP 分别交对边于 P_1、P_2、P_3.求证:$\frac{AP}{PP_1}$、$\frac{BP}{PP_2}$、$\frac{CP}{PP_3}$中至少有一个不大于 2,也至少有一个不小于 2.

(1961 年第 3 届 IMO 试题)

证明 如图 6.20,设 G 为重心,$GA' /\!/ BC$,$GB' /\!/ AC$,$GC' /\!/ AB$,这样就把$\triangle ABC$ 分成三个梯形了.当 P 落在 $AA'GC'$ 上(包括内部)时

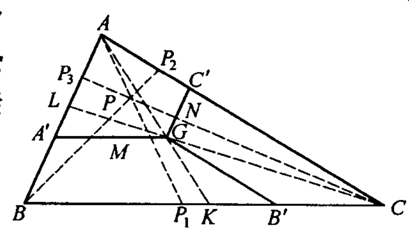


图 6.20

$$\frac{AP}{PP_1} \leqslant \frac{AM}{MP_1} = \frac{AG}{GK} = 2$$

而
$$\frac{CP}{PP_3} \geqslant \frac{CN}{NP_3} = \frac{CG}{GL} = 2$$

而 P 落在其他两个梯形上时,同理也可获证.

例 3 把一个钝角(或直角)三角形剖分为锐角三角形.

分析 对钝角(或直角)三角形,若从顶点向对边引截线,不可能截出两个锐角三角形.因此,一定要从三角形内一点向顶点(或边)引截线,由于钝角(或直角)三角形的外心,垂心都不在形内,重心与钝角顶点的连线未必把它分为两个锐角,可用内心试一试,而且尽量剖分为等腰三角形(底角必为锐角),于是得如下剖分法.

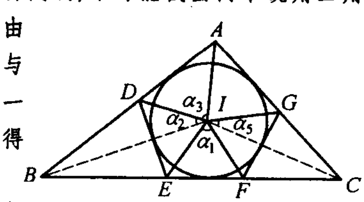


图 6.21

解 如图 6.21,$\triangle ABC$ 中,$\angle A \geqslant 90°$,I 为内心,过 BI、CI 同内切圆 I 交点作切线分别交边于

D、E、F、G，则圆 I 也是五边形 $ADEFG$ 的内切圆，因此，剖分出的七个三角形就都是锐角三角形，事实上，只要证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 是锐角就可以了．如

$$\alpha_1 = 180^\circ - \angle IEF - \angle IFE = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DEB) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle GFC) =$$

$$\frac{1}{2}(\angle DEB + \angle GFC) < 90^\circ$$

例4 试证：任何一个三角形都可以用直线分成四部分，由这四部分拼成的两个三角形与原三角形相似．

（1986年湖北省黄冈地区初中数学竞赛题）

证明 在所给△ABC 的 AB、BC 和 CA 边上分别找出点 D、E 和 F，使 $AD:AB = CE:CB = AF:AC = 1:5$，然后，在 AC 边上找出一点 G，使 $AG = 2AF$，并找出 DE 的中心 H．用 DE、DF 和 GH 这三条线段分割三角形（图6.22(a)），△BDE 作为所求的两个三角形中的一个，所剩下的三块可以在该平面内拼合成第二个相似三角形（图6.22(b)）．

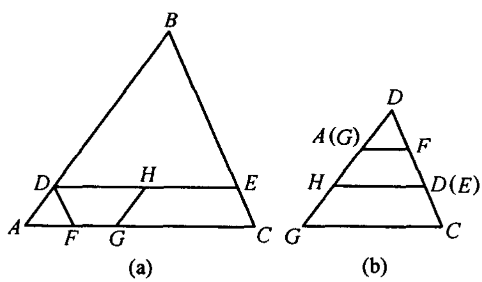


图6.22

第7章 1985~1986年度试题的诠释

从这一年开始,在全国联赛的基础上,于次年元月举办数学冬令营(即中国数学奥林匹克(CMO))选拔出集训队学生,试题记为B级,在集训期间的最后一次选拔赛,试题记为C级.

试题A 平面上任给五个相异的点,它们之间的最大距离及最小距离之比记为λ,求证:$\lambda \geqslant 2\sin 54°$,并讨论等号成立的充要条件.

证法1 若平面上任给三个点,那么它们或者在一直线上,或者能构成一个三角形,若平面上任给四点,那么它们或者构成四边形,或者都在一直线上,或者….现在平面上已任给五点,下面分别进行分类讨论.

(1)若以所给的五点为顶点能组成一个凸五边形,那么,由凸五边形的内角和为540°,知它的最大角不小于108°,设其为$\angle A$.又设B、C为其相邻两旁的顶点,且$\angle ACB < \angle ABC$.则在$\triangle ABC$中,$\frac{1}{2}\angle A + \angle C \leqslant 90°$,即$\angle C \leqslant 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

因锐角的正弦函数是增函数,则

$$\sin C \leqslant \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

根据正弦定理

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = 2\sin\frac{A}{2} \geqslant 2\sin 54°$$

设此五点中,两点间的最大、最小距离分别为p、q,则$p \geqslant a$,$q \leqslant c$.因此有

$$\lambda = \frac{p}{q} \geqslant \frac{a}{c} \geqslant 2\sin 54°$$

(2)若所给的五点不能组成凸五边形,则有以下两种情况.

(i)五点中有三点共线,设此三点为A、B、C,且B在A、C之间,则

$$\frac{|AC|}{\min(|AB||BC|)} \geqslant 2 > 2\sin 54°$$

(ii)五点无三点共线,而其中一点在其他三点组成的三角形内部,设点P

在△ABC内部，则$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$中至少有一个不小于120°，依(1)的证法，得$\lambda \geqslant 2\sin 60° > 2\sin 54°$. 此时命题仍然成立.

讨论等式$\lambda = 2\sin 54°$成立的充要条件.

由于(2)不可能出现$\lambda = 2\sin 54°$的情况，因此等式成立的充要条件只能在(1)中得到，在(1)的证明过程中，若等式$\lambda = 2\sin 54°$成立，即

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin A}{\cos \frac{A}{2}} = 2\sin \frac{A}{2} = 2\sin 54°$$

则$\angle A = 108°$，$\angle B = \angle C$，即△ABC为顶角是108°的等腰三角形，而且对于凸五边形的每个顶角(内角)都适用，因此，它是正五边形，这时$p = q$，$q = c$.

反之，若五边形是正五边形，则显然有$\lambda = 2\sin 54°$成立.

从而，等号成立的充要条件是所给五点组成一个正五边形的顶点.

证法2 (1)若五点中有三点A、B、C共线，不妨设B在A与C之间，并且$AB \geqslant BC$，于是

$$\lambda \geqslant \frac{AC}{BC} \geqslant 2 > 2\sin 54°$$

(2)下设五点中任何三点不共线，又分为下列三种情况.

(i)五点的凸包是凸五边形$ABCDE$，则其中必有一个内角不小于$\frac{1}{5} \times (5-2) \times 180° = 108°$. 不妨设$\angle EAB \geqslant 108°$，且$EA \geqslant AB$. 在△$EAB$中，由余弦定理，有

$$EB^2 = EA^2 + AB^2 - 2EA \cdot AB\cos \angle EAB \geqslant 2AB^2 + 2AB^2\cos(180° - 108°) =$$
$$2AB^2(1 + \cos 72°) = 4AB^2\cos^2 36° = 4AB^2\sin^2 54°$$

故 $$\lambda \geqslant \frac{EB}{AB} \geqslant 2\sin 54°$$

(ii)五点的凸包为凸四边形$ABCD$，另一点E在$ABCD$内，因无三点共线，不妨设E在△ABC内，于是$\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$中至少有一个角不小于$\frac{1}{3} \times 360° = 120°$，不妨设$\angle AEB \geqslant 120°$，这时同(i)中推理，可得

$$EB^2 \geqslant 4AB^2\cos^2 30° = 4AB^2\sin^2 60° > 4AB^2\sin^2 54°$$

所以 $$\lambda > 2\sin 54°$$

(iii)五点的凸包为△ABC，另两点D、E在△ABC内，如图7.1所示，这时同(ii)可得$\lambda > 2\sin 54°$.

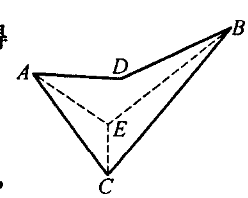


图7.1

综上可得 $\lambda \geqslant 2\sin 54°$.

因为在情形(1)和(2)中的情形(ii)、(iii)时,都有 $\lambda > 2\sin 54°$,故要 $\lambda = 2\sin 54°$,只有(2)中的情形(i)才有可能,并且从(i)中推理知,要使 $\lambda = 2\sin 54°$,必须 $EA = AB$,且用它代替 $\angle A$ 进行同(i)一样的推理,可得 $\lambda > 2\sin 54°$,故 $\lambda = 2\sin 54°$时必有 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.若凸五边形 $ABCDE$ 至少有两边不相等,则必有相邻两边不相等,用这两边代替 EA、AB,进行同(i)一样的推理,可得 $\lambda > 2\sin 54°$,可见 $\lambda = 2\sin 54°$时,五点必须是一个正五边形的五个顶点.反之易知,当五点为一个正五边形的五个顶点时,有 $\lambda = 2\sin 54°$成立.这就证明了$\lambda = 2\sin 54°$的充要条件是给定的五点为一个正五边形的五个顶点.

试题 B1 如图 7.2,在 $\triangle ABC$ 中,BC 边上的高 $AD = 12$,$\angle A$ 的平分线 $AE = 13$,设 BC 边上的中线 $AF = m$.问 m 在什么范围内取值时,$\angle A$ 分别是锐角、直角、钝角?

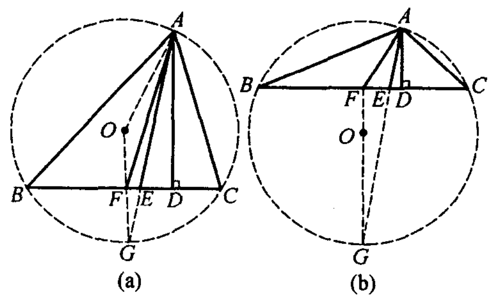


图 7.2

146 **解法 1**[①] 我们先证明一个辅助命题.

作$\triangle ABC$ 的外接圆,延长 AE 交外接圆于 G,联结 FG,则 $FG \perp BC$ 且直线 FG 过圆心 O.

显然,$\angle A$ 为锐角时 $AF > OA > FG$;$\angle A$ 为直角时 $AF = OA = FG$;$\angle A$ 为钝角时 $AF < OA < FG$.

由$\triangle ADE \backsim \triangle EFG$ 及 $DE = 5$ 得$\frac{FG}{AD} = \frac{EF}{ED}$,即$\frac{FG}{12} = \frac{EF}{5}$,所以,$\angle A$ 为锐角时

$$\frac{m}{12} > \frac{FG}{12} = \frac{EF}{5}, EF < \frac{5}{12}m$$

同理,A 为直角时,$EF = \frac{5}{12}m$;A 为钝角时,$EF > \frac{5}{12}m$.

下面研究命题本身.

由勾股定理得

$$EF = \sqrt{m^2 - 12^2} - 5$$

所以$\angle A$ 为锐角时,有

① 连笑.首届全国中学生数学冬令营竞赛试题解答[J].中等数学,1986(3):34-38.

$$\sqrt{m^2-12^2}-5<\frac{5}{12}m$$

解得
$$m<\frac{12\times 13^2}{119}$$

另一方向，$m>13$，所以 $13<m<\frac{12\times 13^2}{119}$ 时，$\angle A$ 为锐角.

同理 $m=\frac{12\times 13^2}{119}$ 时，$\angle A$ 为直角；$m>\frac{12\times 13^2}{119}$ 时，$\angle A$ 为钝角.

解法2　(钱向阳给出)先考察$\angle A$ 为直角的情形.如图7.3所示，作$\triangle ABC$ 的外接圆，延长 AE 交外接圆于点 S，由 AE 平分$\angle BAC$ 可得$\widehat{BS}=\widehat{SC}$.联结 SF，有 $SF\perp BC$，即 $SF/\!/AD$.又由 $SF=AF$(都等于外接圆半径)可得$\angle FAE=\angle FSA=\angle EAD$.于是在$\triangle AFD$ 中，有$\frac{AF}{AD}=\frac{FE}{ED}$，由 $AD=12$，$AE=13$，可得 $ED=5$.又 $AF=m$，得

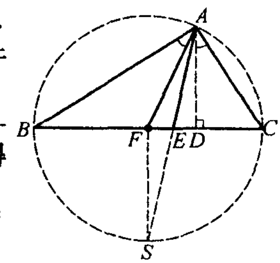


图7.3

$$\frac{m}{12}=\frac{\sqrt{m^2-12^2}-5}{5}$$

解得
$$m=\frac{169\times 12}{119}=\frac{2\ 028}{119}$$

又易证 $m>13$，且 m 的值随着$\angle A$ 的增大而增大，所以可得本题的解答为：

当 $13<m<\frac{2\ 028}{119}$ 时，$\angle A$ 为锐角；

当 $m=\frac{2\ 028}{119}$ 时，$\angle A$ 为直角；

当 $m>\frac{2\ 028}{119}$ 时，$\angle A$ 为钝角.

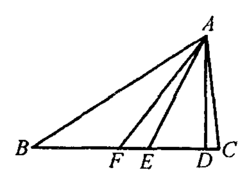


图7.4

解法3　如图7.4，首先由勾股定理得

$$ED=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$$

不论$\triangle ABC$ 怎样变化，直角$\triangle AED$ 总是固定的.

设$\angle EAD=\alpha$，于是 $\tan\alpha=\frac{5}{12}$.又设

$$\angle BAE=\angle CAE=\beta$$

则 $$\angle BAD=\beta+\alpha,\angle CAD=\beta-\alpha$$

从而 $$BD=AD\ \tan(\beta+\alpha)=12\tan(\beta+\alpha)$$

且 $$CD=AD\ \tan(\beta-\alpha)=12\tan(\beta-\alpha)$$

由 $BD=BF\pm FD,CD=CF\mp FD$ 及 $BF=CF$ 有

$$FD=\frac{1}{2}|BD-CD|=6|\tan(\beta+\alpha)-\tan(\beta-\alpha)|=$$

$$6\left|\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}-\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=$$

$$6\left|\frac{2\tan\alpha(1+\tan^2\beta)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}\right|=5\cdot\frac{1+\tan^2\beta}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2\tan^2\beta}\qquad(*)$$

下面分三种情况进行讨论.

(i)当$\angle A$ 为锐角时,$0<\beta<\frac{\pi}{4}$,$0<\tan^2\beta<1$,由式$(*)$可得 $5<FD<\frac{1\ 440}{119}$,因

$$m=AF=\sqrt{AD^2+FD^2}=\sqrt{144+FD^2}$$

则 $$\sqrt{144+5^2}<m<\sqrt{144+\frac{1\ 440^2}{119^2}}$$

即 $$13<m<\frac{12\times13^2}{119}$$

(ii)当$\angle A$ 为直角时,$\beta=\frac{\pi}{4}$,$\tan^2\beta=1$,由式$(*)$

$$FD=\frac{5\times2}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$$

则 $$m=\sqrt{12^2+FD^2}=\frac{12\times13^2}{119}$$

(iii)当$\angle A$ 为钝角时,$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$,则

$$1<\tan^2\beta<\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot^2\alpha=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

由式$(*)$可得 $DF>\frac{12^2\times10}{119}$,从而 $m>\frac{12\times13^2}{119}$,综上可有:

当 $13<m<\frac{12\times13^2}{119}$时,$\angle A$ 为锐角;

当 $m=\frac{12\times13^2}{119}$时,$\angle A$ 为直角;

当 $m>\frac{12\times 13^2}{119}$ 时，$\angle A$ 为钝角.

解法 4　如图 7.5，以 $\triangle ABC$ 的角分线 AE 所在直线为 x 轴，A 为坐标原点，相应得到 y 轴.

设 $\angle BAE=\angle CAE=\theta$，且 $|\tan\theta|=k$，由 $AD=12$，$DE=5$，$E(13,0)$ 得 $|k_{AD}|=\frac{5}{12}$，则 $k_{BC}=\frac{12}{5}$.

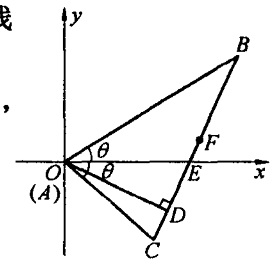


图 7.5

直线 BC 的方程为

$$y=\frac{12}{5}(x-13)$$

直线 AB 的方程为　$y=kx$

直线 AC 的方程为　$y=-kx$

解得点 B 和点 C 坐标为

$$B\left(\frac{12\times 13}{12-5k},\frac{12\times 13k}{12-5k}\right),C\left(\frac{12\times 13}{12+5k},\frac{-12\times 13k}{12+5k}\right)$$

则中点 $F(x_F,y_F)$ 得

$$x_F=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{12^2\times 13}{144-25k^2},y_F=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{60\times 13k}{144-25k^2}$$

$$|AD|=m=\sqrt{x_F^2+y_F^2}=\frac{13\sqrt{12^4+60^2k^2}}{144-25k^2}$$

当且仅当 $k=1=\tan\frac{\pi}{4}$ 时，$\angle A$ 为直角. 此时 $m=\frac{12\times 13^2}{119}$；

当且仅当 $k<1$ 即 $\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，$\angle A$ 为锐角. 考虑到 $m>13$ 得 $13<m<\frac{12\times 13^2}{119}$；

当且仅当 $k>1$ 即 $\theta>\frac{\pi}{4}$ 时，$\angle A$ 为钝角. 此时 $m>\frac{12\times 13^2}{119}$.

试题 B2　已知：四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上，求证：四个三角形 $\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_1P_2P_4$、$\triangle P_1P_3P_4$、$\triangle P_2P_3P_4$ 中，至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

证法 1　为简便，设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，其他图形的面积则在 S 的右下角标上该图形的顶点的字母.

(i)先证明最简单的情形.

四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为平行四边形,且其中一个顶点与△ABC 的一个顶点重合.

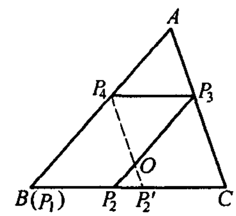


图 7.6

如图 7.6,▱$P_1P_2P_3P_4$ 中必有一边不大于另一边,不妨设 $P_1P_2 \leqslant P_2P_3$.

过 P_4 作 $P_4P_2' /\!/ AC$ 交 BC 于 P_2',交 P_2P_3 于 O.则

$$\triangle OP_3P_4 \cong \triangle AP_3P_4, S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square P_2'CP_3P_4}$$

于是 $2S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{OP_2'CP_3} + S_{\triangle OP_3P_4} =$

$$S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{OP_2'CP_3} + S_{\triangle AP_3P_4} \leqslant S$$

则

$$S_{\square P_1P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S$$

因此,以▱$P_1P_2P_3P_4$ 的任何三点为顶点的三角形的面积不大于$\frac{1}{2}S$.命题成立.

(ii) 再证明△ABC 的任意内接平行四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的情形.

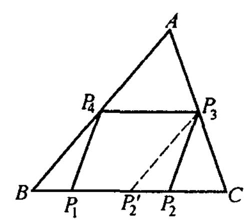


图 7.7

如图 7.7,过 P_3 作 $P_3P_2' /\!/ AB$ 交 BC 于 P_2',则

$$S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square BP_2'P_3P_4}$$

如(i)所证 $$S_{\square BP_2'P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S$$

则 $$S_{\square P_1P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S$$

从而命题成立.

(iii)四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为任意四边形,且两个顶点在一边,另两个顶点分别在另两边的情形.

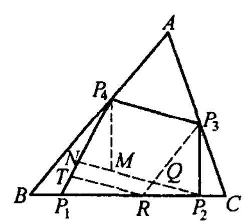


图 7.8

设 P_1、P_2 在 BC 上,P_3 在 AC 上,P_4 在 AB 上,如图 7.8 所示,我们依次令 $P_1P_2P_3P_4$ 的内角为∠1、∠2、∠3、∠4,由∠1+∠2+∠3+∠4=360°可得,必有两角之和不小于 180°,不妨设

$$\angle 3 + \angle 4 \geqslant 180^\circ, \angle 3 + \angle 2 \geqslant 180^\circ$$

我们过 P_2、P_4 作 $P_2M /\!/ P_3P_4$,$P_4M /\!/ P_2P_3$,且两平行于 P_3P_4、P_2P_3 的直线交于 M,则 M 必落在四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的内部,于是

$$S_{\triangle P_2P_3P_4} = \frac{1}{2}S_{\square P_2P_3P_4M} \quad ①$$

延长 P_2M 交 P_1P_4 于 N,过 P_3 作 $P_3R /\!/ AB$ 交 P_2N 于 Q,交 BC 于 R,过 R

作 $RT /\!/ CN$ 交 P_1P_4 于 T,则

$$S_{\square P_2P_3P_4M} = S_{\square QP_3P_4N} < S_{\square RP_3P_4T} \quad ②$$

由(ii)所证 $S_{\square RP_3P_4T} \leqslant \frac{1}{2}S$,由①、②得 $S_{\triangle P_2P_3P_4} = \frac{1}{4}S$.从而命题得证.

(iv)四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为任意四边形,且两个顶点在一边上,另两个顶点在另一边上.

设 P_1、P_2 在 BC 边上,P_3、P_4 在 AC 边上.

如图 7.9,不妨设 $P_1P_2 \geqslant P_3P_4$.联结 P_2P_4,过 P_1 作 $P_1P_1' /\!/ P_2P_4$,交 AB 于 P_1',联结 $P_1'P_4$,则

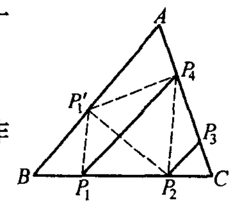


图 7.9

$$S_{\triangle P_1P_2P_4} = S_{\triangle P_1'P_2P_4}$$

且

$$S_{\triangle P_1'P_2P_3P_4} = S_{\triangle P_1P_2P_3P_4}$$

而四边形 $P_1'P_2P_3P_4$ 属于情形(iii),则有

$$S_{P_1'P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S, S_{\triangle P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{4}S$$

从而命题得证.

由(i)、(ii)、(iii)、(iv)本题得证.

证法2 分两种情况进行讨论.

(i)$\triangle ABC$ 的每一条边上均有 P_1、P_2、P_3、P_4 中的点.

由于四个点在三条边上,所以至少有一条边上有其中的两个点,设 BC 边上有 P_2、P_3 点,P_1 在 AB 上,P_4 在 AC 上,如图 7.10 所示.

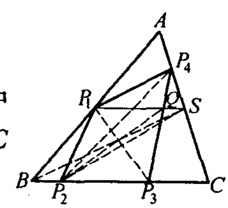


图 7.10

设 P_4 到 BC 的距离大于等于 P_1 到 BC 的距离.

过 P_1 作 $P_1S /\!/ BC$ 交 P_4P_3 交 Q,交 AC 于 S.

考虑同底的三角形:$\triangle P_1P_2P_4$,$\triangle P_1P_2Q$,$\triangle P_1P_2P_3$ 有

$$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3}, S_{\triangle P_1P_2P_4}\} \leqslant S_{\triangle P_1P_2Q} \leqslant S_{\triangle P_1P_2S}$$

又因 $P_1S /\!/ BC$,则

$$S_{\triangle P_1P_2S} = S_{\triangle P_1BS}, \min\{S_{\triangle P_1P_2P_3}, S_{\triangle P_1P_2P_4}\} \leqslant S_{\triangle P_1BS}$$

设 $\frac{P_1B}{AB} = x$,则 $S_{\triangle P_1BS} = xS_{\triangle BSA}$;又由 $\frac{P_1B}{AB} = \frac{SC}{AC}$,可得 $\frac{AS}{AC} = 1 - x$,则有

$$S_{\triangle P_1BS} = xS_{\triangle BSA} = x(1-x)S$$

当 $0 < x < 1$ 时

$$x(1-x) \leqslant \left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

从而
$$S_{\triangle P_1BS}\leqslant\frac{1}{4}S$$

即
$$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_4},S_{\triangle P_1P_2P_3}\}\leqslant\frac{1}{4}S$$

(ii)$\triangle ABC$ 中有一边不含 P_1、P_2、P_3、P_4 中的任何一点,设此边为 BC,如图7.11所示.

设 P_1、P_2 在 AB 上,P_3、P_4 在 AC 上.

由于 A 和 P_1、P_2、P_3、P_4 产生的四个小三角形中必有一个面积不大于$\frac{1}{4}S_{\triangle AP_2P_3}$.又由 $S_{\triangle AP_2P_3}<S$.

于是必有一个小三角形的面积不大于$\triangle ABC$ 的面积的$\frac{1}{4}$.由(i)、(ii)本题得证.

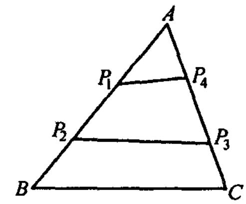


图7.11

证法3 (沈建给出)先证明一个引理:任一三角形的内接矩形的面积不大于三角形面积的一半.即如图7.12所示,$DEFG$ 是$\triangle ABC$ 的内接矩形,必有

$$S_{DEFG}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

事实上,如图7.12所示,作 BC 上的高 AH,交 GF 于 K.设 $BC=a$,$AH=h$,$GF=x(0\leqslant x\leqslant a)$,则由$\triangle AGF\backsim\triangle ABC$ 可得

$$AK=\frac{xh}{a}$$

从而
$$DG=h-AK=\frac{h(a-x)}{a}$$

$$S_{DEFG}=\frac{x\cdot h(a-x)}{a}\leqslant\frac{h}{a}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ah\right)=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

上述结论当$\triangle ABC$ 为钝角三角形,点 E 在 BC 延长线上时(图7.13)也成立,证明与上完全相同.

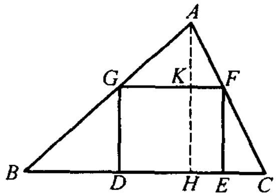


图7.12

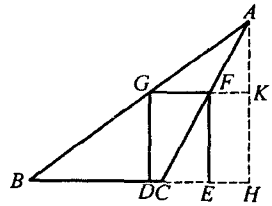


图7.13

再证原题结论：有下列两种情况.

(1)P_1、P_2、P_3、P_4 四点分布在$\triangle ABC$ 的三条边上，如图 7.14 所示.

如果 $P_1P_2P_3P_4$ 是矩形，则有

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=S_{\triangle P_1P_2P_4}=S_{\triangle P_1P_3P_4}=S_{\triangle P_2P_3P_4}=\frac{1}{2}S_{矩形P_1P_2P_3P_4}\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\right)=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

结论显然成立.

如果 $P_1P_2P_3P_4$ 不是矩形，则四个三角形中必有一面积最小者，这时又有两种可能.

(i)面积最小的三角形有两个顶点在$\triangle ABC$ 的同一条边上. 如图 7.14 所示，设 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$为最小.

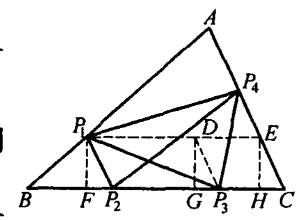


图 7.14

由 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant S_{\triangle P_4P_2P_3}$，可知 P_1 到 BC 的距离不大于P_4 到 BC 的距离. 过点 P_1 作 $P_1E // BC$，交 AC 于E，这时，点 P_4 必定在 PE 的上方或在 PE 上.

又由 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant S_{\triangle P_1P_2P_4}$，可知 P_3 到 P_1P_2 的距离不大于 P_4 到 P_1P_2 的距离，过 P_3 作 P_2P_1 的平行线交 P_1E 于 D. 这时，点 P_4 必在 P_3D 的右方或在 P_3D 上.

因此，点 D 必定在四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的内部或边上，从而必在$\triangle ABC$ 内部或与点 P_4 重合.

过 P_1、D、E 三点分别作 BC 的垂线 P_1F、DG、EH，垂足分别为 F、G、H，有

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}S_{\square P_1P_2P_3D}=\frac{1}{2}S_{矩形P_1FGD}\leqslant\frac{1}{2}S_{矩形P_1FHE}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\right)=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

(ii)面积最小的三角形三个顶点分别在$\triangle ABC$ 三条边上，如图 7.15 所示，设 $S_{\triangle P_1P_2P_4}$为最小.

过 P_4 作 P_1P_2 的平行线，过 P_2 作 P_1P_4 的平行线，设两者相交于点 D.

过 A 作 $AE // P_1P_2$，与 P_1P_4、P_2D 分别交于 F、G. 与(i)证明相仿，可得

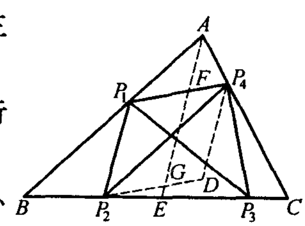


图 7.15

$$S_{\square P_1P_2GF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABE},S_{\square GFP_4P_3}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}$$

所以
$$S_{\triangle P_1P_2P_4}=\frac{1}{2}S_{\square P_1P_2DP_4}=\frac{1}{2}(S_{\square P_1P_2GF}+S_{\square GFP_4P_3})\leqslant$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}+\frac{1}{2}S_{\triangle AEC})=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

(2)P_1、P_2、P_3、P_4 四点分布在$\triangle ABC$ 的两边上，如图 7.16 所示．这时，很显然，由(1)所证可知，$S_{\triangle P_1P_2P_3}$、$S_{\triangle P_1P_2P_4}$、$S_{\triangle P_1P_3P_4}$、$S_{\triangle P_2P_3P_4}$中至少有一个不小于$\frac{1}{4}S_{\triangle P_4BP_3}$，而 $S_{\triangle P_4BP_3}\leqslant S_{\triangle ABC}$，从而即得须证结论．

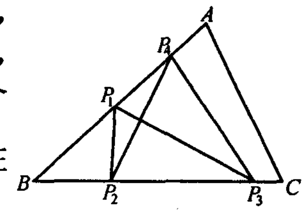


图 7.16

证法 4 （由陆沙给出）分两种情况讨论．

(1)P_1、P_2、P_3、P_4 四点分布在$\triangle ABC$ 三条边上，如图 7.16 所示．

用反证法．假设命题不真，即 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$、$S_{\triangle P_1P_2P_4}$、$S_{\triangle P_1P_3P_4}$、$S_{\triangle P_2P_3P_4}$均大于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，BC 边上的高为 h，并令 $BP_2=k_1a$，$CP_3=k_2a$，$BP_1=\lambda_1c$，$AP_4=\lambda_2b$，其中 $0\leqslant k_1\leqslant 1$，$0\leqslant k_2\leqslant 1$，并且不妨设 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant 1$（若 $\lambda_2\leqslant\lambda_1$，类似可证，只要在下面证明中将考察$\triangle P_1P_2P_3$ 与$\triangle P_1P_2P_4$ 换成$\triangle P_1P_3P_4$ 与$\triangle P_2P_3P_4$ 即可）．

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}(1-k_1-k_2)a\lambda_1h=\lambda_1(1-k_1-k_2)\frac{1}{2}ah=\lambda_1(1-k_1-k_2)S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle P_1P_2P_4}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AP_1P_4}-S_{\triangle BP_1P_2}-S_{\triangle CP_2P_4}=[1-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)-\lambda_1k_1-\lambda_2(1-k_1)]S_{\triangle ABC}$$

于是，由假设得

$$\lambda_1(1-k_1-k_2)>\frac{1}{2} \quad ①$$

$$1-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)-\lambda_1k_1-\lambda_2(1-k_1)>\frac{1}{4} \quad ②$$

②即为

$$\lambda_2(k_1-\lambda_1)+\lambda_1(1-k_1)>\frac{1}{4} \quad ③$$

(i)若 $\lambda_1\geqslant k_1$，则

$$\lambda_2(k_1-\lambda_1)+\lambda_1(1-k_1)\leqslant\lambda_1(k_1-\lambda_1)+\lambda_1(1-k_1)=\lambda_1(1-\lambda_1)\leqslant\frac{1}{4}$$

与③矛盾．

(ii)若 $\lambda_1 < k_1$,则

$$\lambda_1(1-k_1-k_2) < k_1(1-k_1-k_2) \leqslant k_1(1-k_1) \leqslant \frac{1}{4}$$

与①矛盾.

故在此情况下,假设亦不真,即命题结论为真.

(2) P_1、P_2、P_3、P_4 四点分布在 $\triangle ABC$ 的两条边上,如图 7.16 所示,同证法 3.

证法 5　我们先给出一个引理,然后再应用引理给出其证明.

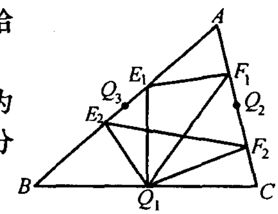


图 7.17

引理　如图 7.17,在 $\triangle ABC$ 中, Q_1、Q_2、Q_3 分别为 BC、AC、AB 中点, E_1、F_1 分别在 AQ_3、AQ_2 上, E_2、F_2 分别在 BQ_3、CQ_2 上,则

$$S_{\triangle Q_1E_1F_1} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle Q_1E_2F_2} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

事实上,设 $\frac{AE_1}{AB} = x\left(x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $\frac{AF_1}{AC} = y\left(y \leqslant \frac{1}{2}\right)$,则

$$S_{\triangle AE_1F_1} = xyS_{\triangle ABC}, S_{\triangle BE_1Q_1} = \frac{1}{2}(1-x)S_{\triangle ABC}, S_{\triangle CF_1Q_1} = \frac{1}{2}(1-y)S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle Q_1E_1F_1} = \left[1 - xy - \frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}(1-y)\right]S_{\triangle ABC} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy\right)S_{\triangle ABC} =$$

$$\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\right]S_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

同理可证

$$S_{\triangle Q_1E_2F_2} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

原题的证明　如图 7.18, Q_1、Q_2、Q_3 仍分别是 BC、AC、AB 的中点, A、Q_2、Q_3, B、Q_1、Q_3, C、Q_1、Q_2 可以构成三个三角形.在 P_1、P_2、P_3、P_4 四点中,如果至少有三个点落在其中一个三角形的边上,则题中结论显然成立.由抽屉原理,至少有二个点落在其中一个三角形的边上,这时可分以下两种情况.

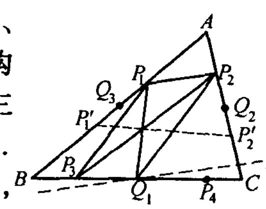


图 7.18

(1)设 P_1、P_2 分别在 AQ_3、AQ_2 上, P_3、P_4 分别在 $\triangle BQ_1Q_3$ 与 $\triangle CQ_1Q_2$ 边上,过 Q_1 作 P_1P_2 的平行线 l,易得

$$S_{\triangle P_3P_1P_2} \leqslant S_{\triangle Q_1P_1P_2}$$

由引理 $$S_{\triangle QP_1P_2} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

故 $$S_{\triangle P_3P_1P_2} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

(2)如图 7.18,设 P_1'、P_3 在$\triangle BQ_1Q_3$ 边上,P_2'、P_4 在$\triangle CQ_1Q_2$ 边上,仿情况(1)可得,$\triangle P_1'P_2'P_3$、$\triangle P_1'P_2'P_4$ 中至少有一只三角形的面积小于等于 $\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

试题 C1 四边形 $ABCD$ 内接于圆,$\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的内心依次记为 I_A、I_B、I_C、I_D. 证明:$I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

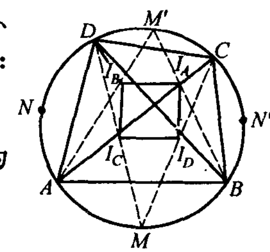


图 7.19

证法 1 如图 7.19,设 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$ 中点分别为 M、N'、M'、N. 则

$$MI_C = MA = MB = MI_D$$

则$\triangle I_CMI_D$ 为等腰三角形. 又 MM' 平分$\angle DMC$,有 $MM' \perp I_CI_D$. 同理 $MM' \perp I_AI_B$. 有 $I_AI_B // I_CI_D$. 同理 $I_BI_C // I_AI_D$. 故四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 为平行四边形.

但 $MM' \perp NN'$,而 I_AI_B、I_BI_C 分别与它们垂直,即 $I_AI_B \perp I_BI_C$. 故 $I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

证法 2 如图 7.20,联结 AI_C、BI_C、AI_D、BI_D. 有

$$\angle I_CBI_D = \angle ABI_D - \angle ABI_C = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ABD)$$

$$\angle I_CAI_D = \angle I_CAB - \angle I_DAB = \frac{1}{2}(\angle BAD - \angle BAC)$$

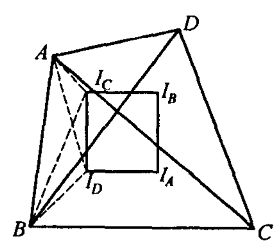


图 7.20

又因 $ABCD$ 内接于圆,则

$$\angle ADB = \angle ACB$$

即 $$\angle ABC + \angle BAC = \angle ABD + \angle BAD$$

则 $$\angle I_CBI_D = \angle I_CAI_D$$

于是 ABI_DI_C 内接于圆,从而有

$$\angle I_CI_DB = \pi - \angle BAI_C = \pi - \frac{1}{2}\angle BAD$$

同理 $$\angle I_AI_DB = \pi - \frac{1}{2}\angle DCB$$

又
$$\angle I_CI_DB+\angle I_AI_DB=\pi-\frac{1}{2}\angle BAD+\pi-\frac{1}{2}\angle DCB=$$
$$2\pi-\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle DCB)=\frac{3}{2}\pi$$
则
$$\angle I_CI_DI_A=\frac{\pi}{2}$$
同理可证
$$\angle I_DI_AI_B=\angle I_BI_CI_D=\angle I_AI_BI_C=\frac{\pi}{2}$$
故 $I_AI_BI_CI_D$ 为矩形.

试题 C2　正方形 $ABCD$ 边长为1，AB、AD 上各有一点 P、Q. 如果 $\triangle APQ$ 的周长为2，求 $\angle PCQ$ 的度数.

解法 1　设 $\angle BCP=\alpha$，$\angle DCQ=\beta$. 因
$$BP=\tan\alpha,QD=\tan\beta,AP=1-\tan\alpha,AQ=1-\tan\beta$$
则
$$PQ=2-AP-AQ=\tan\alpha+\tan\beta$$
由 $AP^2+AQ^2=PQ^2$，可知
$$(1-\tan\alpha)^2+(1-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2$$
整理得
$$\tan(\alpha+\beta)=1$$
又由 $0\leqslant\alpha+\beta<90°$，知 $\alpha+\beta=45°$，即
$$\angle PCQ=90°-\alpha-\beta=45°$$

解法 2　如图7.21，按照题意有
$$0<a<1,0<b<1,a+b+\sqrt{a^2+b^2}=2$$
$$\sqrt{a^2+b^2}=2-a-b$$
化去根号并整理得
$$a+b-ab=2-a-b \quad ①$$

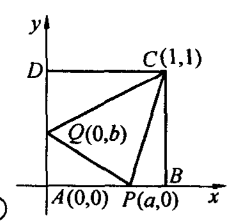


图7.21

PC 的斜率为
$$k_{PC}=\frac{1}{1-a}$$
QC 的斜率为
$$k_{QC}=1-b$$
$\angle PCQ$ 是直线 CQ 按逆时针方向旋转到 CP 形成的最小角，因此有
$$\tan\angle PCQ=\frac{k_{CP}-k_{CQ}}{1+k_{CP}k_{CQ}}=\frac{\frac{1}{1-a}-(1-b)}{1+\frac{1-b}{1-a}}=\frac{a+b-ab}{2-a-b}$$
根据①得
$$\tan\angle PCQ=1,0<\angle PCQ<\pi$$

则$\angle PCQ=\frac{1}{4}\pi$,此为所求的角的弧度.

解法3 如图7.22,将$\triangle CDQ$绕点C逆时针方向旋转$90°$,边CD落在CB上,点Q到点Q'.因$\angle CBQ'=\angle CDQ=90°$,则$\angle ABC+\angle CBQ'=180°$,即知点$P$、$B$、$Q'$共线.

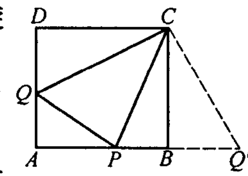


图7.22

由$\triangle APQ$的周长等于正方形$ABCD$的周长的一半等于$AB+AD$,知

$$PQ=PB+DQ=PB+BQ'=PQ'$$

又$CQ=CQ'$,CP公用,则

$$\triangle CPQ=\triangle CPQ'$$

故 $$\angle CPQ=\angle CPQ'=\frac{1}{2}\angle QCQ'=\frac{1}{2}\angle DCB=45°$$

第1节 点距比问题

平面内给定$n(n\geqslant 3)$个点,每两点间有一个距离,称最长距离与最短距离之比为点距比,且记为λ_n.

前面的试题A1,讨论λ_5的问题,下面我们看λ_4、λ_6的问题.

1.λ_4的问题[①]

1961年匈牙利试题:平面上的四个点可以连成六条线段.证明:最长的线段和最短的线段的比不小于$\sqrt{2}$.

证法1 设P_1、P_2、P_3、P_4是平面上的四个给定点.我们取这些点所确定的线段中最短的作为长度单位.现在要证明:在六条线段中至少有一条线段的长度不小于$\sqrt{2}$.

假设P_1P_2是由四个给定的点所确定的线段中最短的线段,即单位长线段,以点P_1和P_2为圆心作两个单位圆,如图7.22所示.点P_1、P_4中的任何一个点都不可能在这两个圆内,如若不然,线段P_1P_2就是点P_1、P_2、P_3、P_4所确定的线段中最短的线段了.现在我们以点P_1和P_2为圆心作两个半径都为$\sqrt{2}$的圆.这两个圆通过正方形P_1P_2BA的顶点A和B.以P_2为圆心的圆通过顶点

① Й.库尔沙克.匈牙利奥林匹克数学竞赛题解[M].胡湘陵,译.北京:科学普及出版社,1979:256-258.

A，以 P_1 为圆心的圆通过顶点 B. 如果点 P_3、P_4 中的某一个点不在以 P_1 和 P_2 为圆心，以$\sqrt{2}$为半径所画的圆内，那么它到圆心的距离不小于$\sqrt{2}$.

这样一来，我们只要研究点 P_3 和 P_4 在每一个半径为$\sqrt{2}$的圆内且在以点 P_1、P_2 为圆心的单位圆外(或在圆上)的情形就行了. 这意味着点 P_3 和 P_4 属于曲线多边形 $ADBC$ 和 $A'D'B'C'$，但除去弧 AD、BD 和 $A'D'$、$D'B'$ 上的点.

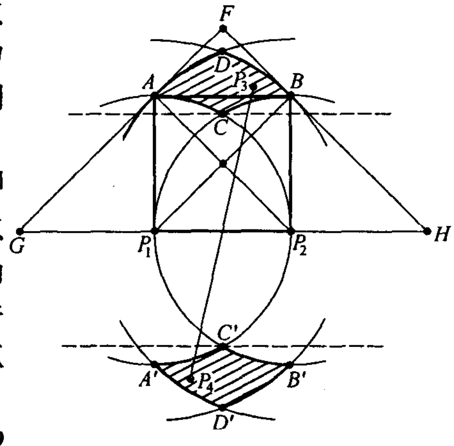


图7.23

从图7.23看出，曲线四边形 $ACBD$ 位于以 AB 为对角线的正方形内，且在曲线四边形的顶点中，只有顶点 A 和 B 在正方形的周界上(下面我们严格证明这一点). 由此(由于曲线四边形 $ACBD$ 和 $A'C'B'D'$ 对称)推出，曲线四边形的任意两点之间的距离不大于1，因为位于正方形内的任一线段不会大于正方形的对角线(也许这样作更显然：作正方形的外接圆，其圆的直径等于正方形的对角线，位于圆内的任一线段总比它的直径短).

于是只要研究点 P_3 属于一个曲线四边形，而点 P_4 属于另一个曲线四边形的情况就行了. 过点 C 和 C' 作直线和线段 P_1P_2 平行. 这两条直线确定了一个带子，这条带子把曲线四边形 $ACBD$ 和 $A'C'B'D'$ 分开了. 带子的宽大于$\sqrt{2}$，因为单位长线段 CP_1 和 P_1C' 之间的夹角等于 $120°$，即大于 $90°$. 线段 P_3P_4 和带子相交. 因此，它的长度不小于带子的宽，即不小于$\sqrt{2}$，这就是所要证明的.

上面我们借助于图7.22利用了下面这一点：曲线四边形 $ACBD$ 包含在以 AB 为对角线的正方形内，而且只有曲线四边形的顶点 A 和 B 属于正方形的周界. 现在我们较严格地证明这个断言.

圆周的弧所围成的曲线四边形的顶点 A 和 B 必定在正方形的周界上. 因此只要证明曲线四边形 $ACBD$ 的其他的点不属于正方形的周界就行了. 除了顶点 A 和 B 以外，线段 AF 和 BF 不包含曲线四边形其他的点，因为这两条线段在过点 A 和 B 向大圆弧所作的切线上. 由此推出曲线四边形 $ACBD$ 在$\triangle FGH$ 内. 以点 P_1 为圆心的单位圆的弧 AP_2 和$\triangle FGH$ 的周界相交两次(在点 A 和点 P_2)且把曲线四边形 $ACBD$ 和弦 AP_2 分开. 只有弦 AP_2 的端点才可能是曲线四边形 $ACBD$ 和这个弦 AP_2 的公共点. 因此，除了点 A 以外，线段 AP_2 上的任何其他的

点都不可能属于曲线四边形 $ACBD$. 对于线段 BP_1 也可以进行同样的论证(除了点 B 外,它上面的任一点都不属于曲线四边形 $ACBD$).

证法 2 在直角三角形中,斜边与较小的(精确地说,不是较大)直角边的比不小于$\sqrt{2}$. 事实上,如果 $a\leqslant b$,那么 $c^2=a^2+b^2\geqslant 2a^2$,由此得到 $c/a\geqslant\sqrt{2}$.

如果三角形的两边长度保持不变,而其夹角增加,那么第三边也变大(可由正弦定理推导),因此在钝角三角形甚至在蜕化的三角形(彼此衔接起来的线段所组成的)中,最大的边和最小的边的比大于$\sqrt{2}$.

于是,只要证明在平面上的四个点中,总可以找到这样三个点,它们是直角三角形、钝角三角形或蜕化的三角形的顶点就行了. 在平面上任意取四个点. 不失一般性,可以假设其中任何三点都不在一直线上. 我们研究所取四点的凸包,即在这四个点上插上针,将线缠在针上拉紧后所围成的多边形. 因为四个点中的任何三个点都不在一直线上,它们的凸包或者是三角形,或者是四边形.

如果凸包具有$\triangle P_1P_2P_3$ 的形状如图 7.24 所示,由于任何三点都不在一直线上,所以点 P_4 在这个三角形内. 线段 P_4P_1、P_4P_2、P_4P_3 把$\triangle P_1P_2P_3$ 分成三个小的三角形. 这三个小三角形在顶点 P_4 的三个顶角之和等于 360°. 因此这些小三角形中至少有一个是钝角三角形(不但如此,在这些小三角形中至少有两个是钝角三角形).

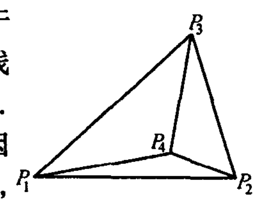


图 7.24

如果凸包具有四边形的形状,那么可以肯定它的四个内角不可能都是锐角,因为它们的和等于 360°. 因此,最大的角是直角或钝角,而夹这个角的两边是直角三角形或钝角三角形的两条边.

2. λ_6 的问题

我们首先看 1965 ~ 1966 年波兰数学竞赛题或 1964 年普特南数学竞赛题.[①]

在平面上任意给定六点,求证:这六点中,两点间最远距离与两点间最近距离的比不小于$\sqrt{3}$.

证明 (1)若已知的六点中有三点共线,例如点 B 在线段AC 上,则不等式 $AC\geqslant 2BC$ 或 $AC\geqslant 2AB$ 总有一个成立,因而本题论断正确.

(2)若已知的六点只能构成凹六边形(图 7.25),则其中必有一点(设为 A)

① 吴振奎,等. 世界数学奥林匹克解题大辞典——几何卷[M]. 石家庄:河北少年儿童出版社,2003.

位于其他五点构成的某个三角形(设为$\triangle BCD$)内.

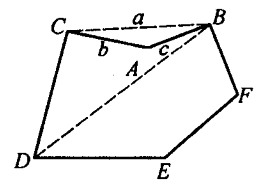


图7.25

考察$\triangle BAC$、$\triangle CAD$、$\triangle DAB$，则其中必有一个三角形的一个内角不小于$120°$，设$\angle BAC \geqslant 120°$，且$AC = b \leqslant AB = c$，又设$BC = a$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geqslant b^2 + c^2 - 2bc\cos 120° = b^2 + c^2 + bc \geqslant 3b$$

故$\frac{a}{b} \geqslant \sqrt{3}$.

(3)若已知的六点构成一个凸六边形，则此六边形必有一个内角为小于$120°$的钝角，由(2)的计算，亦可证明结论正确.

3. λ_n的问题

张垚教授给出了$\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$的证明①.

当$n = 4$时，前面已证. 当$n \geqslant 5$时，若n点中有三点共线，则易得$\lambda_n \geqslant 2 > 2\sin\frac{n-2}{2n}\pi$. 下设$n$点中无三点共线，且这$n$个点的凸包为凸$k$边形$A_1A_2\cdots A_k$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$，不妨设这个凸$k$边形的最小内角为$\angle A_kA_1A_2$，于是

$$\angle A_kA_1A_2 \leqslant \frac{(k-2)\pi}{k} \leqslant \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

并且A_1与其他已知点的连线将$\angle A_kA_1A_2$分成$n-2$个小角(因无三点共线)，其中最小的一个角(不妨设为$\angle A_iA_1A_j$)不超过$\frac{1}{n-2} \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$.

注意到：在$\triangle ABC$中，有一个内角不超过$\frac{\pi}{n}$ $(n \geqslant 5)$时，则$\lambda_3 \geqslant 2\cos\frac{\pi}{n}$.

事实上，不妨设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中$\angle C \leqslant \angle B \leqslant \angle A$，于是

$$\angle C \leqslant \frac{\pi}{n}, \angle A \leqslant \pi - (\angle A + \angle C) \leqslant \pi - 2\angle C, \pi - \angle A \geqslant 2\angle C \quad ①$$

又

$$2\angle A \geqslant \angle A + \angle B = \pi - \angle C$$

$$\angle A \geqslant \frac{1}{2}(\pi - \angle C) \geqslant \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \geqslant 2\frac{\pi}{n} (\text{因 } n \geqslant 5)$$

即

$$\angle A \geqslant 2\angle C \quad ②$$

---

① 张垚，等. 奥林匹克数学中的组合问题[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2004：247.

当$\angle A \geqslant \frac{\pi}{2}$时,由②得

$$\sin A \geqslant \sin 2C$$

当$\angle A > \frac{\pi}{2}$时,由①得

$$\sin A = \sin(\pi - A) \geqslant \sin 2C$$

故总有

$$\sin A \geqslant \sin 2C$$

于是

$$\lambda_3 = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin 2C}{\sin C} = 2\cos C \geqslant 2\cos\frac{\pi}{n}$$

此时,可得$\triangle A_iA_1A_j$中最长边与最短边之比大于等于$2\cos\frac{\pi}{n}$,所以

$$\lambda_n \geqslant 2\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{n-2}{2n}\pi$$

第2节　倍角三角形问题

在一个三角形中,若有一角是另一角的 n 倍,则称涉及这一条件的三角形问题为倍角三角形 .

在1985年高中联赛第一试中,有一道涉及倍角三角形的有趣问题.

题目　在$\triangle ABC$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c.若$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的大小成等比数列,且$b^2 - a^2 = ac$,则$\angle B$的弧度数等于________.

解法1　将$b^2 - a^2 = ac$变形为$bb = aa + ac$形似托勒密定理,为此作$\triangle ABC$的外接圆圆O,过C作$CD /\!/ AB$交圆O于D,如图7.26所示.

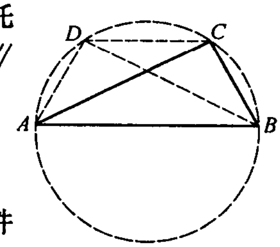


图7.26

则由托勒密定理得

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

而$ABCD$是等腰梯形,故$aa + aDC = bb$,根据已知条件得$DC = a$,则

$$\angle ABC = 2\angle BAC$$

又

$$(\angle ABC)^2 = \angle BAC \cdot \angle ACB$$

故

$$\angle ACB = 4\angle BAC$$

由$\triangle ABC$内角和为π,得$\angle BAC = \frac{\pi}{7}$.故$\angle ABC = \frac{2}{7}\pi$.

解法2　将$b^2 - a^2 = ac$变为$(b + a)(b - a) = ac$,此式形似相交弦定理,

故构图如下:作半径为 b 的圆 C 和两条半径 CA、CF,联结 AF.设 CF 的垂直平分线交 AF 于 B,过 B、C 作直径 ED,如图 7.27 所示,设 $AB=c$,$BF=a$,则 $\triangle ABC$ 满足题设条件 $b^2-a^2=ac$.

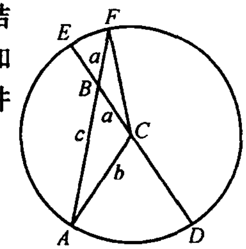


图 7.27

此时,据相交弦定理有

$$BF\cdot BA=EB\cdot BD$$

又据已知有 $EB\cdot BD=BC\cdot BA$,所以

$$BC=BF,\angle BCF=\angle BFC,\angle ABC=2\angle BFC$$

又 $$\angle A=\angle BFC$$

故 $$\angle ABC=2\angle A$$

以下同解法 1.

解法 3　由余弦定理可知

$$b^2-a^2=2bc\cos A-c^2$$

将 $b^2-a^2=ac$ 变为 $\cos A=\frac{a+c}{2b}$.故作 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 如图 7.28 所示,设 $AD=2b$,$AE=a+c$.作 AD 边上的中线 EC,设 CE 的垂直平分线交 AE 于 B,且 $BE=a$,则 $AB=c$.$\triangle ABC$ 满足题设条件 $b^2-a^2=ac$.

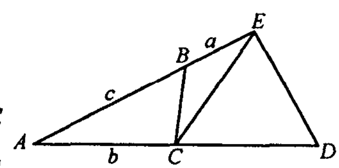


图 7.28

注意到 EC 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线,则

$$\angle A=\angle BEC$$

又据作法可知 $$\angle BEC=\angle BCE$$

故 $$\angle ABC=2\angle BEC=2\angle A$$

以下同解法 1.

解法 4　把 b^2-a^2 看做整体,则 $\sqrt{b^2-a^2}$ 是 a 与 c 的比例中项.故设法构图:作圆的两条互相垂直的弦 DE、CF,如图 7.29 所示.其中 CF 为直径.设 $BC=a$,$BF=c$,$DC=b$.以 BC 为一边,b、c 为另两边作 $\triangle ABC$,则 $\triangle ABC$ 满足题设条件 $b^2-a^2=ac$.

联结 AF,有 $AB=BF=c$,从而

$$\angle BAF=\angle BFA,\angle ABC=2\angle BFA$$

由 $$b^2-a^2=ac$$

知
$$\frac{b}{a}=\frac{a+c}{b}$$
又$\angle ACB$为公共角,则$\triangle ABC\backsim\triangle AFC$.因而有
$$\angle BAC=\angle BFA,\angle ABC=2\angle BAC$$
以下同解法1.

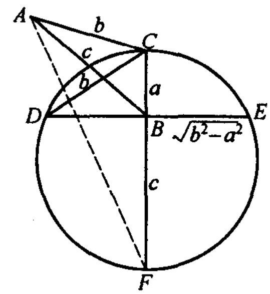


图7.29

由上述试题及其证明,我们有如下结论.

在$\triangle ABC$中,$\angle A$、B、C所对的边分别为a、b、c,且$b^2-a^2=ac$,则$\angle B=2\angle A$.反之亦然.因而有:

结论1 在一个三角形中,一角是另一角的两倍的充分必要条件是这两角所对边的平方差的绝对值等于两角中较小角所对边与第三边的积.

由题设条件求得的结果知
$$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$$
因而有:

结论2 在$\triangle ABC$中,若$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,则

(1)当CD是一条角平分线时,$CD=AC-BC$;当BE是另一条角平分线时,$BE=AB-BC$;且
$$CD\cdot AB=BC\cdot AC,BE\cdot AC=AB\cdot BC,BC^2=CD\cdot BE$$
(2)令$BC=a,AC=b,AB=c$,有
$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
且
$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{b}{2a},\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{c}{2b},\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{a}{2c}$$

证明 (1)在AC上取$CK=BC$,联结DK,如图7.30所示.显然
$$KA=AC-CK=AC-BC$$

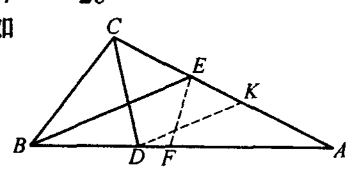


图7.30

易证 $\triangle CDK\cong\triangle CDB$

故 $DK=DB,\angle CKD=\angle B=2\angle A$

但 $\angle CKD=\angle KDA+\angle A$

故 $\angle KDA=\angle A$

因此 $DB=DK=KA=AC-BC$

不难证明$\triangle DCB$是等腰三角形,即$CD=DB$.故有$CD=AC-BC$.

又在AB上取$BF=BC$,联结FE,如图7.29所示.设$\angle C=4x$,则$\angle ABC=2x,\angle A=x$,注意$7x=180°$.易证

$$\triangle BEF \cong \triangle BEC$$

故
$$\angle BFE = \angle C = 4x$$

$$\angle BEF = \angle BEC = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle A = 2x$$

因此
$$\angle AEF = 180° - \angle BEF - \angle BEC = 180° - 4x = 3x$$

而
$$\angle AFE = 180° - \angle BFE = 180° - 4x = 3x$$

则$\angle AEF = \angle AFE$,即 $AE = AF$,又

$$\angle EBA = \frac{1}{2}\angle ABC = x = \angle A$$

则
$$BE = AE = AF$$

故
$$BE = AF = AB - BF = AB - BC$$

由
$$\triangle ABC \backsim \triangle DAC \backsim \triangle CEB$$

即得
$$CD \cdot AB = BC \cdot AC, BE \cdot AC = AB \cdot BC$$

由此两式相乘得
$$BC^2 = CD \cdot BE$$

(2)延长 CB 到 D,使 $BD = c$,如图 7.31 所示,则

$$\angle D = \angle BAD, \angle CBA = 2\angle D$$

又
$$\angle CBA = 2\angle CAB$$

则$\angle CAB = \angle D$.由$\angle C$ 公共,知$\triangle CAB \backsim \triangle CDA$,则

$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$$

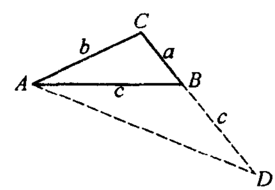


图 7.31

即
$$\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b}$$

则有

$$b^2 - a^2 = ac \quad ①$$

同理可证

$$c^2 - b^2 = ba \quad ②$$

①+②得

$$c^2 = ac + ab + a^2 = a(a+b+c)$$

则
$$\frac{1}{a} = \frac{a+b+c}{c^2} = \frac{a+b}{c^2} + \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab+b^2} + \frac{1}{c}$$

故

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad ③$$

在$\triangle ABC$ 中,由$\angle A:\angle B:\angle C = 1:2:4$,可得

$$\angle A=\frac{\pi}{7},\angle B=\frac{2\pi}{7},\angle C=\frac{4\pi}{7}$$

由正弦定理得 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\frac{a}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{b}{\sin\frac{2\pi}{7}}$$

故

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{b}{2a} \quad ④$$

又 $$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

则 $$\frac{b}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{c}{\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{c}{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}$$

故

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{c}{2b} \quad ⑤$$

 由余弦定理 $$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{a^2-ab}{2ab}=\frac{a-b}{2b}$$

由式③得

$$c(a-b)=-ab$$

从而 $$a-b=-\frac{ab}{c}$$

故

$$\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{a}{2c} \quad ⑥$$

注 由上即知 $|\cos A\cos B\cos C|=\frac{1}{8}$.

推论[①] 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$，三条高 AD、BE、CF 的垂足分别为 D、E、F，则 $\triangle ABC\backsim\triangle FDE$，且 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

结论 3 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若 $\angle A=3\angle B$，则

$$a^3+b^3=b(a^2+ab+c^2)$$

或者 $$(a-b)^2(a+b)=bc^2$$

① 孙哲．一道初中几何题与国内外竞赛题[J]．中学数学，2001(1)：44-46．

证法1　若注意到三角恒等式

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta \qquad (*)$$

则于式(*)，置 $\alpha=\angle A,\beta=\angle B$，则 $\alpha+\beta=\pi-\angle C,\alpha-\beta=2\angle B$. 于是，有

$$\sin^2 A-\sin^2 B=2\sin C\sin B\cos B$$

结合正弦定理和余弦定理，上式即

$$\frac{a^2}{4R^2}-\frac{b^2}{4R^2}=2\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

即
$$a^3+b^3=b(a^2+ab+c^2)$$

证法2①　先看如下引理：

引理　在△ABC 中，$\angle A=n\alpha(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$，$D$ 为 BC 上一点，且

$$\angle ADC=n\alpha,AD=x,BD=y$$

则
$$x=\frac{bc}{a},y=\frac{a^2-b^2}{a}$$

(a、b、c 分别为△ABC 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，下同)

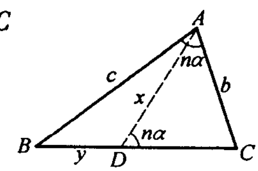


图7.32

事实上，如图7.32所示，因 $\triangle BAC\backsim\triangle ADC$，则

$$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}x\cdot BD\sin(\pi-n\alpha)+\frac{1}{2}x\cdot DC\sin n\alpha=$$

$$\frac{1}{2}xa\sin n\alpha=S_{\triangle ABC}$$

而
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin n\alpha$$

从而 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AC}$，故得 $x=\frac{bc}{a}$. 同理 $\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}$. 于是

$$AC^2=DC\cdot BC,b^2=(a-y)a=a^2-ya$$

故得 $y=\frac{a^2-b^2}{a}$. 引理证毕.

由题设 $\angle A=3\angle B$，如图7.33所示，作 $\angle BAD=2\alpha$，设 $BD=y$，由引理易知

$$y=\frac{a^2-b^2}{a},x=\frac{bc}{a}$$

而在△ABD 中，由于 $\angle DAB=2\angle B$，利用引理，有

① 方亚斌. 等角对等边的联想[J]. 中学数学，1990(7):36-38.

$$f_2(y,x,c)=y^2-x^2-xc=0$$

因此,只须将 $x=\dfrac{bc}{a}$,$y=\dfrac{a^2-b^2}{a}$代入上面式子,即得

$$f_3(a,b,c)=(a-b)^2(a+b)-bc^2$$

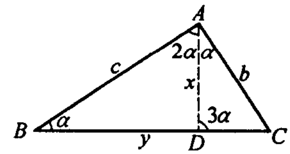


图 7.33

注 (i)当$\angle A=2\angle B$时,作$\angle BAC$的平分线AD,则

$$\angle ADC=\angle BAC=2\alpha,AD=x=BD=y$$

由引理知
$$x=\frac{bc}{a},y=\frac{a^2-b^2}{a}$$

所以
$$\frac{bc}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$$

即得
$$f_2(a,b,c)=a^2-b^2-bc$$

(ii)当$\angle A=n\angle B(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$,作$\angle BAD=(n-1)\alpha$,如图 7.34 所示,在$\triangle ABD$中,边的关系为

$$f_{n-1}(y,x,c)=0 \qquad (**)$$

同上,容易求得

$$y=\frac{a^2-b^2}{a},x=\frac{bc}{a}$$

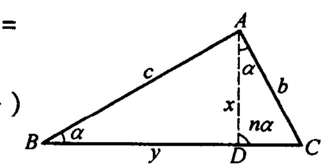


图 7.34

将它们分别代入式(* *)中相应的位置,即得关于$f_a(a,b,c)$的表达式.从而我们有:

结论 4 $\triangle ABC$中,若$\angle A=n\angle B(n\in\mathbf{N})$,则三边 a、b、c 满足 a、b、c 的恒等式$f_n(a,b,c)$.这里$f_n(a,b,c)$归纳定义为

$$\begin{cases}f_n(a,b,c)=f_{n-1}\left(\dfrac{a^2-b^2}{a},\dfrac{bc}{a},c\right)\\ f_1(a,b,c)=a-b\end{cases}$$

譬如,由

$$f_3(a,b,c)=(a-b)^2(a+b)-bc^2$$

得 $f_4(a,b,c)=f_3(\dfrac{a^2-b^2}{a},\dfrac{bc}{a},c)=(\dfrac{a^2-b^2}{a}-\dfrac{bc}{a})^2\cdot(\dfrac{a^2-b^2}{b}+\dfrac{bc}{a})-\dfrac{bc^3}{a}$

化简后,即为

$$f_4(a,b,c)=(a^2-b^2-bc)^2(a^2-b^2+bc)-a^2bc^3$$

同理 $f_5(a,b,c)=(a+b)(a-b)^2[(a-b)(a+b)^2+bc^2]-a^2bc^4$

$$f_6(a,b,c)=(a^2-b^2-bc)^2(a^2-b^2+bc)[(a^2-b^2+bc)(a^2-b^2-bc)+a^2bc^3]-(a^2-b^2)^2a^2bc^5$$

读者有兴趣的话,还可继续类似,另外,下列事实也是成立的,即

结论1　若 $f_1(a,b,c)=a-b=0$,则$\angle A=\angle B$;

若 $f_2(a,b,c)=a^2-b^2-bc=0$,$\angle A=2\angle B$;

⋮

若 $f_n(a,b,c)=0$,则$\angle A=n\angle B$.

有兴趣的读者,可自行证明结论5.限于篇幅,在此不证.

下面看一些应用的例子.

例1　在圆的内接$\triangle ABC$中,$\angle A$的平分线与圆相交于E,过E作$EF\perp AB$,垂足为F,求证:$AF=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

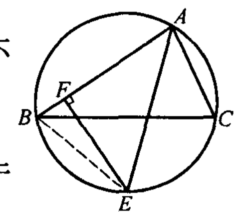


图7.35

证明　如图7.35,联结BE,知

$$\angle EAF=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\angle B+\angle C}{2}\right),\angle ABE=\pi-\angle C-\frac{\angle A}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\angle C-\angle B}{2}\right)$$

在

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

中,令$\alpha=\angle C,\beta=\angle B$,得

$$\sin C+\sin B=\frac{\sin A\sin(C-B)}{\sin C-\sin B}$$

故

$$AB+AC=2R\cdot\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cdot2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C-B}{2}}{2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}}=$$

$$4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{C-B}{2}=2\cdot2R\sin\angle ABE\cos\angle EAF=$$

$$2\cdot AE\cos\angle EAF=2AF$$

例2　已知:D是$\triangle ABC$的边AC上一点,$AD:DC=2:1$,$\angle C=45°$,$\angle ADB=60°$,求证:AB是$\triangle BCD$的外接圆的切线.

(1987年全国初中数学联赛题)

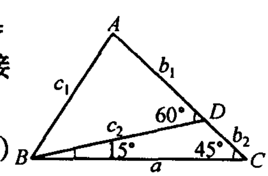


图7.36

证明　记$BC=a$,$AD=b_1$,$DC=b_2$,$AB=c_1$,$BD=c_2$,如图7.36所示.易知$\angle DBC=15°$,则$\angle C=3\angle DBC$.在$\triangle DBC$中,由结论3知

$$(c_2-b_2)^2(c_2+b_2)-b_2a^2=0 \quad ①$$

又由余弦定理得

$$a^2=c_2^2+b_2^2+c_2b_2 \quad ②$$

由①,②两式可得

$$c_2^2-2b_2c_2-2b_2^2=0$$

但 $b_2=\frac{b_1}{2}$,故

$$c_2^2-b_1c_2-b_1b_2=0 \quad ③$$

又在$\triangle ABD$中,依余弦定理得

$$c_1^2=b_1^2+c_2^2-b_1c_2 \quad ④$$

由③、④两式得

$$c_1^2=b_1^2+b_1b_2=b_1(b_1+b_2)$$

即 $AB^2=AD\cdot AC$,从而$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$,得$\angle ABD=\angle C$,故 AB 是$\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

例 3 已知$\triangle ABC$中最大角$\angle A$是最小角$\angle C$的两倍,夹大角两边 $b=5$,$c=4$,求第三边 a 和三角形面积.

(1980 年上海市中学数学竞赛题)

解 由题设$\angle A=2\angle C$及结论 1,知

$$a^2=c^2+bc=16+20=36$$

即知 $a=6$.

由海伦公式,求得 $S_{\triangle ABC}=\frac{15}{4}\sqrt{17}$.

例 4 三角形三边为连续自然数,且最大角为最小角的两倍.求三边长.

(1961 年第 3 届 IMO 试题)

解 由题意,设三角形三边长为 $n-1,n,n+1$.则

$$(n+1)^2=(n-1)^2+n(n-1)$$

解得 $n=5,n=0$(不合题意,舍去).故三角形三边为 4,5,6.

例 5 求证:$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

(1963 年第 5 届 IMO 试题)

证明 由

$$\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)=-\cos\frac{4\pi}{7}$$

则由结论 2 中的④-⑤-⑥得

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{b}{2a}-\frac{c}{2b}+\frac{a}{2c}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b^2-ac}{ab}+\frac{a}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)=\frac{1}{2}$$

故
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

例6 如图7.37,在$\triangle ABC$中,$\angle C=3\angle A$,$a=27$,$c=48$,求b.

(1985年第36届美国AHSME试题)

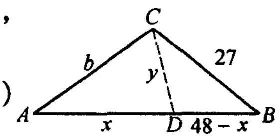


图7.37

解 作$\angle BCD=\angle A$,则$\angle ACD=2\angle A$.

由结论2中式①得

$$x^2-y^2=by \quad ①$$

$$(CD=y,AD=x,BD=48-x)$$

由$\triangle ABC\backsim\triangle CBD$得

$$\frac{AB}{CB}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{BD}$$

即
$$\frac{48}{27}=\frac{b}{y}=\frac{27}{48-x}$$

则
$$x=\frac{25\times21}{16},y=\frac{9}{16}b$$

代入式①得$b=35$.

练 习 题

1.已知$\triangle ABC$中,$\angle B=2\angle C$,AD为BC上的高,E为BC的中点,求证:(1)$DE=\frac{1}{2}AB$;(2)$AC+CD=BD$.

2.已知$\triangle ABC$中,$\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$.求证:$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AB}$.

3.在锐角$\triangle ABC$中,$\angle ACB=2\angle ABC$,点D是BC边上一点,使得$2\angle BAD=\angle ABC$,求证:$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

(1999～2000年波兰奥林匹克题)

4.对于满足$\angle A=2\angle B$,$\angle C$是钝角,三边长a、b、c是整数的三角形,求周长的最小值,并给出证明.

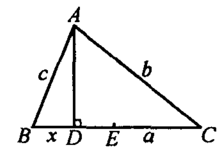
(1991年第20届美国奥林匹克题)

5.在$\triangle ABC$中,$\angle C=3\angle A$,$a=27$,$c=48$.求b.

练 习 题 解 答

1.(1)如图,设 $BD=x$,则 $x=c\cos B$.但

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$



第 1 题

则
$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

由已知 $BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$,得

$$DE=BE-BD=\frac{1}{2}a-x=\frac{1}{2}a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{b^2-c^2}{2a}$$

又由$\angle B=2\angle C$,则

$$b^2=c^2+ac$$

故
$$DE=\frac{c^2+ac-c^2}{2a}=\frac{c}{2}=\frac{1}{2}AB$$

(2)因$\angle C=2\angle B$,则

$$AB^2-AC^2=AC\cdot BC \quad ①$$

又由 $AD\perp BC$,知

$$AC^2-CD^2=AB^2-BD^2=AD^2\cdot AC^2-CD^2=AB^2-(BC-CD)^2=$$
$$AB^2-BC^2-CD^2+2BC\cdot CD$$

即

$$AB^2-AC^2-BC^2+2BC\cdot CD=0 \quad ②$$

将①代入②得

$$AC\cdot BC-BC^2+2BC\cdot CD=0$$
$$AC-BC+2CD=0$$

故
$$AC+CD=BC-CD=BD$$

2.作$\triangle ABC$ 的外接圆,在圆上取$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BA}$,联结 BD、AD、CD.不难得到$\angle ACD=2\angle ACB=\angle ABC=\angle ADC$,故

$$AD=AC=b$$

又
$$\angle BDC=\angle BDA+\angle ADC=\angle ACB+\angle ABC=$$
$$\angle ACB+2\angle ACB=3\angle ACB$$
$$\angle DBC=\angle DAC=\angle BAC-\angle BAD=4\angle ACB-\angle BDA=$$
$$4\angle ACB-\angle ACB=3\angle ACB$$

故 $$\angle BDC=\angle DBC, DC=BC=a$$

又 $BD=AB=C$.利用托勒密定理有

$$AD\cdot BC=AB\cdot DC+BD\cdot AC$$

即 $$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AB}$$

3.设$\angle BAD=\alpha$,则$\angle ABC=2\alpha$,$\angle ACB=4\alpha$,由$\angle ACB=2\angle ABC$,有

$$c^2-b^2=ab \quad ①$$

由$\angle DBA=2\angle DAB$,有

$$AD^2-BD^2=BD\cdot c \quad ②$$

在$\triangle ABD$中由余弦定理得

$$AD^2-BD^2=c^2-2BD\cdot c\cdot\cos 2\alpha$$

$$AD^2-BD^2=c^2-2BD\cdot c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad ③$$

将式②代入式③得

$$BD\cdot c=c^2-BD\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{a} \quad ④$$

将式①代入式④得

$$BD\cdot c=c^2-BD\cdot\frac{a^2+ab}{a}$$

从而

$$c=\frac{c^2}{BD}=-(a+b) \quad ⑤$$

由式①得 $a=\dfrac{c^2-b^2}{b}$,代入式⑤得

$$c=\frac{c^2}{BD}-(\frac{c^2-b^2}{b}+b), c=\frac{c^2}{BD}-\frac{c^2}{b}$$

故 $$\frac{1}{c}=\frac{1}{BD}-\frac{1}{b}$$

即 $$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

4.由$\angle A=2\angle B$,有 $a^2-b^2=bc$,即

$$a^2=b(b+c) \quad ①$$

由正弦定理得 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin 2B}$$

即

$$\cos B=\frac{a}{2b}<1\Rightarrow a<2b \qquad ②$$

因$\angle C$是钝角,则

$$a^2+b^2-c^2<0$$

从而
$$a^2<(b+c)(c-b)=\frac{a^2}{b}(c-b)$$

即
$$2b<c$$

故
$$a^2=b(b+c)>b(b+2b)=3b^2$$

即

$$a>\sqrt{3}b \qquad ③$$

由②、③两式得

$$\sqrt{3}b<a<2b$$

由式①,可设 $b=m^2$, $b+c=n^2$(m、$n\in\mathbf{N}_+$),则 $a=mn$,有

$$\sqrt{3}m^2<mn<2m^2$$

即
$$\sqrt{3}m<n<2m$$

则 $2m$、$\sqrt{3}m$ 之间有自然数 n,从而 $2m-\sqrt{3}m>1$,即

$$m>\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}>3$$

故 $m\geqslant 4$. 当 $m=4$ 时,$b=16$,$4\sqrt{3}<n<8$,则 $n=7$,得 $a=28$,$b=33$,有

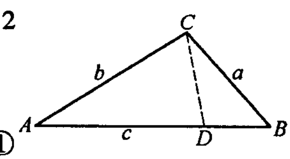
$$a+b+c=mn+n^2=77$$

当 $m\geqslant 5$ 时,$n>7$

$$a+b+c=n^2+mn>84>77$$

故周长 77 为最小值.

5. 如图,在$\angle BCD$中作$\angle BCD=\angle A$,则$\angle ACD=2\angle A$



第5题

设 $AD=x$,$CD=y$,则

$$x^2-y^2=yb \qquad ①$$

由$\triangle ACB\backsim\triangle CDB$,知

$$\frac{y}{b}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}, y=\frac{9}{16}b \qquad ②$$

$$\frac{48-x}{27}=\frac{27}{48}, x=\frac{75\times 21}{48}=\frac{25\times 21}{16} \qquad ③$$

②、③代入①得

$$\left(\frac{25\times 21}{16}\right)^2-\left(\frac{9}{16}\right)b^2=\frac{9}{16}b^2$$

解得 $b=35$.

第 3 节　与三角形内心有关的几个问题

定理 1　$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c，I 是内心，$\angle A$ 的平分线和$\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，与 BC 相交于 G. 则(1) $DI=DB=DC$；(2) $\frac{AI}{GI}=\frac{AD}{DI}=\frac{DI}{DG}=\frac{b+c}{a}$

证明　如图 7.38，联结 BI、CI.

(1)由

$$\angle BID=\angle ABI+\angle BAI=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$

$$\angle DBI=\angle CBI+\angle CBD=\angle CBI+\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$

则$\angle BID=\angle DBI$，故 $DI=DB$.

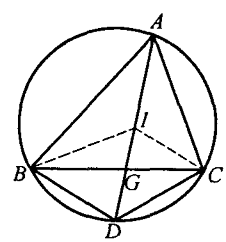


图 7.38

同理 $DI=DC$. 故 $DI=DB=DC$.

(2)因 BI、CI 是$\triangle ABG$、$\triangle ACG$ 的角平分线. 则

$$\frac{AI}{GI}=\frac{AB}{BG}=\frac{AC}{CG}=\frac{AB+AC}{BG+CG}=\frac{b+c}{a}$$

又　$\angle DAC=\angle DAB=\angle DCG$，$\angle ADC=\angle CDG$

则　$\triangle ADC\backsim\triangle CDG$

即　$\frac{AD}{DC}=\frac{AC}{CG}=\frac{CD}{DG}$

由性质(1)知 $DI=DB=DC$，故

$$\frac{AD}{DI}=\frac{AC}{CG}=\frac{AB}{BG}=\frac{AB+AC}{BG+CG}=\frac{b+c}{a}$$

$$\frac{DI}{DG}=\frac{CD}{DG}=\frac{AC}{CG}=\frac{AB}{BG}=\frac{AB+AC}{BG+CG}=\frac{b+c}{a}$$

上面定理的逆也是成立的. 即

逆定理　若 I 在$\triangle ABC$ 中的$\angle A$ 平分线 AD 上(D 在$\triangle ABC$ 的外接圆上)，且 $DI=DB$. 则 I 为$\triangle ABC$ 的内心.

定理 2　设$\triangle ABC$ 的内切圆 O 切 BC 于点 D，过点 D 作直径 DE，联结 AE，并延长交 BC 于点 F，则 $BF=CD$.

证明　如图 7.39，令圆 O 分别切 AB、AC 于点 M、N.

过点 E 作 $GH \parallel BC$,分别交 AB、AC 于点 G、H,则 GH 切圆 O 于点 E,且 $\triangle AGE \backsim \triangle ABF$,$\triangle AGH \backsim \triangle ABC$.

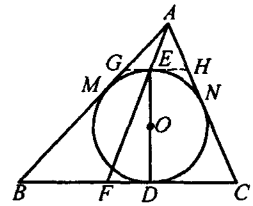


图 7.39

记$\triangle AGH$ 与$\triangle ABC$ 的周长分别为 $2p'$、$2p$,则

$$AG + GE = AG + GM = AM = AN = AH + HN = AH + HE = p'$$

于是 $$\frac{p'}{p} = \frac{2p'}{2p} = \frac{AG}{AB} = \frac{GE}{BF} = \frac{AG + GE}{AB + BF} = \frac{p'}{AB + BF}$$

即有 $$p = AB + BF$$

故 $$BF = p - AB = CD$$

例 1 如图 7.40,在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交外接圆于点 P、Q、R.证明:$AP + BQ + CR > BC + CA + AB$.

(1982 年澳大利亚数学竞赛)

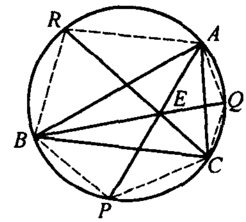


图 7.40

证明 设$\triangle ABC$ 的内心为 E,则有

$$BP = PC = EP, AQ = QC = EQ, ER = AR = BR$$

在$\triangle BPC$ 中,$BP + PC > BC$,即 $2EP > BC$.同理可得

$$2EQ > AC, 2ER > AB$$

则

$$EP + EQ + ER > \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \quad ①$$

在$\triangle EBC$ 中,$EB + EC > BC$,同样可得

$$AE + EC > AC, AE + BE > AB$$

则

$$AE + BE + CE > \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \quad ②$$

① + ②,得

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA$$

例 2 如图 7.41,设 I 为$\triangle ABC$ 的内心,且 A'、B'、C' 分别为$\triangle IBC$、$\triangle IAC$、$\triangle IAB$ 的外心.证明:$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$有相同的外心.

(1988 年第 17 届美国数学奥林匹克)

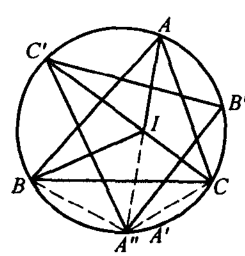


图 7.41

证明 只要证明 A、B、C、A'、B'、C' 六点共圆即可.作出$\triangle ABC$ 的外接圆,延长 AI 交该外接圆,圆于点 A''.因

I 是 $\triangle ABC$ 的内心,故 A'' 必为 $\overset{\frown}{BC}$ 之中点.即 $A''B = A''C$.

由前面的定理 1 得 $A''B = A''I = A''C$ 知 A'' 是 $\triangle IBC$ 的外心,得 $A'' = A'$,即 A' 在 $\triangle ABC$ 外接圆上.

同理可证 B'、C' 也都在 $\triangle ABC$ 外接圆上.

故 A、B、C、A'、B'、C' 六点共圆.

例 3　已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 O 切 BC 于点 D,r 是圆 O 的半径,M 是 BC 的中点,直线 MO 交高 AH 于点 E,求证:$AE = r$.

证明　如图 7.42,过点 D 作直径 DK,联结 AK,并延长交 BC 于点 F,由上述定理 2 知 $BF = DC$.故 BC 的中点 M 也是 FD 的中点.又 O 是 DK 的中点,而有 $MO /\!/ FK$.

由于 $DK \perp BC$,$AH \perp BC$,而有 $DK /\!/ AH$,于是 $AKOE$ 是平行四边形,故 $AE = OK = r$.

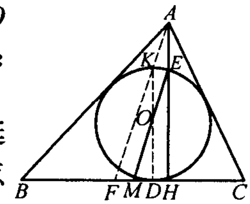


图 7.42

例 4　已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 O 切 BC 于点 D,M 是 BC 的中点,N 是 AD 的中点,求证:O 在直线 MN 上.

证明　如图 7.43,过点 D 作直径 DE,联结 AE,并延长交 BC 于点 F,由上述定理 2 知 $BF = DC$,故 BC 的中点 M 也是 FD 的中点,又 O 是 DE 的中点,N 是 AD 的中点,而有 $MO /\!/ FE$,$ON /\!/ EA$,于是 M、O、N 三点共线,即有 O 在直线 MN 上.

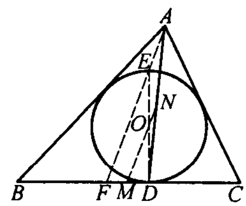


图 7.43

第 4 节　正方形中含 45°的三角形问题

含有 45°的三角形有一系列有趣的结论.

结论 1①　锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 45°$,AD 为边 BC 上的高,则有

$$\frac{AD^2 + BD^2}{AD^2 + DC^2} = \frac{AD + BD}{AD + DC}$$

证明　如图 7.44,设 $AD = h$,$BD = m$,$DC = n$,$\angle BAD = \alpha$,$\angle DAC = 45° - \alpha$,则

$$m = h\tan\alpha, n = h\tan(45° - \alpha)$$

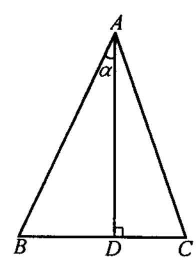


图 7.44

① 陈四川.含 45°的锐角三角形的一个性质[J].福建中学数学,1999(4):21.

$$\frac{AD^2+BD^2}{AD^2+DC^2}=\frac{h^2+m^2}{h^2+n^2}=\frac{h^2+h^2\tan^2\alpha}{h^2+h^2\tan^2(45^\circ-\alpha)}=$$

$$\frac{1+\tan^2\alpha}{1+(\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha})^2}=\frac{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan\alpha)^2}{(1+\tan\alpha)^2+(1-\tan\alpha)^2}=$$

$$\frac{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan\alpha)^2}{2(1+\tan^2\alpha)}=\frac{(1+\tan\alpha)^2}{2}$$

$$\frac{AD+BD}{AD+DC}=\frac{h+m}{h+n}=\frac{h+h\tan\alpha}{h+h\tan(45^\circ-\alpha)}=\frac{1+\tan\alpha}{1+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}}=$$

$$\frac{(1+\tan\alpha)^2}{1+\tan\alpha+1-\tan\alpha}=\frac{(1+\tan\alpha)^2}{2}$$

故

$$\frac{AD^2+BD^2}{AD^2+DC^2}=\frac{AD+BD}{AD+DC}$$

考虑含有45°的锐角三角形内接于正方形，即有：

结论2[①②] 设点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，联结 AM、AN、MN，则

(1) $\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow MN=BM+DN$.

(2) $\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ADN}=S_{\triangle AMN}$.

(3) 当 $AB=a$，$BM=m$，$DN=n$ 时，$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow a(m+n)+mn=a^2$.

(4) $\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow CM\cdot CN=2BM\cdot DN$.

(5) 当 $MF\perp AN$ 于 F，$NE\perp AM$ 于 E 时，$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow B$、$E$、$F$、$D$ 共线.

证明 (1) 如图7.45，先证 $MN=BM+DN\Rightarrow\angle MAN=45^\circ$.

由本章试题C2中的解法3知，当 $MN=BM+DN$ 时，有 $\angle MAN=45^\circ$. 再证 $\angle MAN=45^\circ\Rightarrow MN=BM+DN$. 将 Rt△$ABM$ 绕点 A 旋转90°至△ADM' 位置，如图7.45所示，显然 M'、D、C 三点共线，从而有

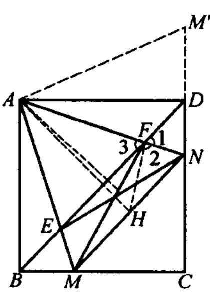


图7.45

$$AM=AM',\angle M'AD=\angle MAB$$

又

$$\angle MAN=45^\circ$$

则

$$\angle NAD+\angle MAB=45^\circ$$

从而

$$\angle NAD+\angle M'AD=45^\circ$$

① 陈万龙.从一道竞赛试题谈起[J].湖南数学通讯，1994(6):33-35.
② 邹宇，沈文选.正方形的一个性质与竞赛题的命制[J].中学数学杂志(初中)，2006(5):57-59.

即 $$\angle M'AN=\angle MAN$$

故 $$\triangle ANM\cong\triangle ANM'$$

从而 $$MN=M'N=DM'+DN=BM+DN$$

(2)由(1)知

$$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow MN=BM+DN\Leftrightarrow\triangle ANM\cong\triangle ANM'\Leftrightarrow$$
$$S_{\triangle ANM}=S_{\triangle ANM'}=S_{\triangle ADN}+S_{\triangle ABM}$$

(3)先证$\angle MAN=45^\circ\Rightarrow a(m+n)+mn=a^2$.

由条件及结论(1)有

$$CM=a-m,CN=a-n,MN=m+n$$

在 Rt$\triangle CMN$ 中,有

$$MN^2=CM^2+CN^2$$

即 $$(m+n)^2=(a-m)^2+(a-n)^2$$

化简整理即得 $$a^2=a(m+n)+mn$$

再证 $a(m+n)+mn=a^2\Rightarrow\angle MAN=45^\circ$. 由 $a^2=a(m+n)+mn$,则可得 $\frac{a(m+n)}{a^2-mn}=1$,即

$$\frac{\frac{m}{a}+\frac{n}{a}}{1-\frac{m}{a}\cdot\frac{n}{a}}=1$$

注意到 $$\tan\angle BAM=\frac{m}{a},\tan\angle DAN=\frac{n}{a}$$

则 $$\frac{\tan\angle BAM+\tan\angle DAN}{1-\tan\angle BAM\tan\angle DAN}=1$$

即 $$\tan(\angle BAM+\angle DAN)=1$$

则$\angle BAM+\angle DAN=45^\circ$,故$\angle MAN=45^\circ$.

(4)由(3)

$$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow a^2=a(m+n)+mn\Leftrightarrow(a-BM)(a-DN)=2BM\cdot DN\Leftrightarrow$$
$$CM\cdot CN=2BM\cdot DN$$

(5)先证$\angle MAN=45^\circ\Rightarrow B、E、F、D$ 共线.

联结 $BE、EF、DF$,如图 7.45 所示,由于$\angle AFM=\angle ABC=90^\circ$,则 $A、B、M、F$ 四点共圆,又 $B、E、F、D$ 四点共线,所以$\angle MAN=\angle MBF=45^\circ$.

再证 $B、E、F、D$ 共线$\Rightarrow\angle MAN=45^\circ$. 根据图 7.45 辅助线的作法可知$\triangle AMN\cong\triangle AM'N$,再作 $AH\perp MN$,则有 $AH=AD$,于是

$$\text{Rt}\triangle AHN \cong \text{Rt}\triangle ADN, HN = DN, \angle AND = \angle ANH$$

进而推得$\triangle NDF \cong \triangle NHF$,故$\angle 1 = \angle 2$.

再由 E、F、N、M 四点及 A、F、H、M 四点共圆知$\angle 2 = \angle AMN = \angle 3$,综上可知:$\angle 1 = \angle 3$,即 D、F、E 三点共线.

同理可证:B、E、F 三点共线,故 B、E、F、D 四点共线.

注 将结论2(1)的条件、结论改变,有如下推广:

推广 在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$AB = AD$,E、F 分别为 BC、CD 上的点,则 $BE + FD = EF$ 的充要条件是$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$.

结论3 设点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上,联结 AM、AN,且$\angle MAN = 45°$.则

(1)$AM \cdot AN = MN \cdot BD$.

(2)$\dfrac{AB + BM}{AD + DN} = \dfrac{AB^2 + BM^2}{AD^2 + DN^2}$.

(3)$\triangle AMN$ 的面积被直线 BD 平分.

(4)当 $AB = a$ 时

$$\frac{2}{5}a^2 < S_{\triangle AMN} \leqslant \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2 < S_{AMCN} < \frac{3}{5}a^2$$

(5)当 $MF \perp AN$ 于 F,$NE \perp AM$ 于 E 时,若 $AO \perp EF$ 于 O 时,O 为正方形 $ABCD$ 的中心,且 $S_{\triangle AMN} = 2S_{\triangle AEF}$.

(6)延长 AN 交$\angle C$ 的外角平分线于点 Q,则 $AM = MQ$.

证明 (1)由结论2(1)、(3)有

$$MN \cdot BD = (m + n)\sqrt{2}a$$

又

$$AM \cdot AN = \sqrt{(a^2 + m^2)(a^2 + n^2)} = \sqrt{a^4 + a^2(m^2 + n^2) + (mn)^2} =$$
$$\sqrt{a^4 + a^2(m^2 + n^2) + [a^2 - a(m + n)]^2} =$$
$$a\sqrt{2(m^2 + n^2 + mn) + [2a^2 - 2a(m + n)]} =$$
$$a\sqrt{2(m^2 + n^2 + mn) + 2mn} = a\sqrt{2(m + n)^2} =$$
$$(m + n)\sqrt{2}a$$

故

$$AM \cdot AN = MN \cdot BD$$

(2)在$\triangle ANM'$中应用结论1即得.

(3)设 BD 与 AM、AN 分别交于点 K、L,联结 ML、KN,两线交于点 P.由$\angle MAN = \angle DBC = 45°$,则 A、B、M、L 四点共圆,即

$$ML \perp AN, LA = LM$$

同理可证 $$NK \perp AM, KN = KA$$

从而知 A、K、P、L 四点共圆，则$\angle KPL = 135°$，而

$$S_{\triangle AKL} = \frac{1}{2} LA \cdot KA \sin 45°, S_{MNLK} = \frac{1}{2} LM \cdot KN \sin 135°$$

故 $$S_{\triangle AKL} = S_{MNKL}$$

注 (i)此结论 3(3)还可进一步推广:①

推广 1 如图 7.45, $ABCD$ 为正方形. 如设$\angle EAF = \alpha$, $\angle DAF = \theta$,则

$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{\cos\theta \sin(\alpha + \theta)}{2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha + \theta)\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)}$$

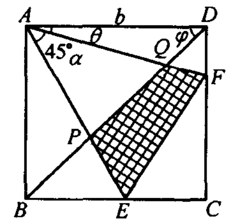


图 7.46

推广 2 已知 $ABCD$ 为矩形(如图 7.46, 将 $ABCD$ 看做矩形). 如设

$$\angle EAF = \alpha, \angle DAF = \theta, \angle ADB = \varphi$$

则 $$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{\sin 2\varphi \cos\theta \sin(\alpha + \theta)}{2\sin(\varphi + \theta)\sin(\alpha + \theta + \varphi)}$$

证明 设 $AB = b$, $AD = BC = a$,则

$$\triangle AQB \backsim \triangle FQD$$

于是 $$\frac{AQ}{AF} = \frac{b}{b + DF}$$

类似 $$\frac{AP}{AE} = \frac{a}{a + BE}$$

又 $$DF = a\tan\theta, BE = b\cot(\alpha + \theta)$$

因此 $$\frac{AQ}{AF} \cdot \frac{AP}{AE} = \frac{b}{b + a\tan\theta} \cdot \frac{a}{a + b\cot(\alpha + \theta)} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}\tan\theta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}\cot(\alpha + \theta)} =$$

$$\frac{1}{1 + \cot\varphi\tan\theta} \cdot \frac{1}{1 + \tan\varphi\cot(\alpha + \theta)} = \frac{\sin 2\varphi \cos\theta \sin(\alpha + \theta)}{2\sin(\varphi + \theta)\sin(\alpha + \theta + \varphi)}$$

注意到$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AQ \cdot AP}{AE \cdot AF}$即知.

(ii)此结论 3(3)实际上为 1990 年四川省初中竞赛题:

如图 7.47, 从正方形 $ABCD$ 的顶点 A 引两射线, 使其夹角为 45°, 分别与 BC、CD 交于 E、F, 与 BD 交于 P、Q, 求证: $S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle APQ}$.

① 柳良均. 一道赛题的推广[J]. 中等数学, 1994(1):20.

(iii)设 AM、AN 被 BD 截于两点，则此两点分 BD 所成的三条线段能构成直角三角形. 即有如下命题:

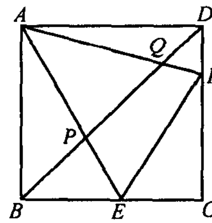


图 7.47

若在等腰 Rt△ABC 的斜边上取异于 B、C 的两点 E、F，使 $\angle EAF=45°$. 求证：以 EF、BE、CF 为边的三角形是直角三角形.

事实上，以 AE、AF 为轴，分别将△AEB 和△AFC 向内部翻折 180°，如图 7.48 所示，因

$$AB=AC,\angle BAE+\angle CAF=\angle EAF=45°$$

则 B 与 C 重合于 B'，$EB'=EB$，$FB'=FC$.

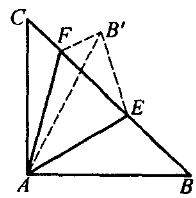


图 7.48

在△$EB'F$ 中，$\angle EB'F=\angle ABE+\angle ACF=90°$ 又易证 B' 点不会落在 BC 上，故 BE、EF、CF 三边可以构成直角三角形.

(4)如图 7.49，先作 $N'N/\!/BC$，N' 在 AB 上，联结 MN'. 易证 $S_{\triangle AMN}\leqslant S_{AN'MN}$(当且仅当 M 重合于 B 时取等号). 而

$$S_{AN'MN}=S_{\triangle AN'N}+S_{\triangle MN'N}=\frac{1}{2}(S_{AN'ND}+S_{N'BCN})=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}$$

故
$$S_{\triangle AMN}\leqslant 0.5a^2$$

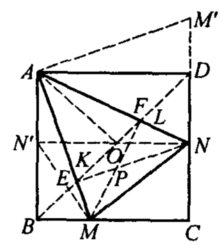


图 7.49

由结论 3 中(1)有

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AM\cdot AN\sin 45°=\frac{1}{2}MN\cdot BD\sin 45°=\frac{1}{2}(m+n)$$

现在只须论证 $\frac{1}{2}(m+n)>0.4a^2$. 而

$$a(m+n)+mn=a^2$$

则
$$n=a(a-m)/(a+m)$$

又 $a(m+n)=a^2-mn=a^2-am(a-m)/(a+m)=a(a^2+m^2)/(a+m)$

设此式等于 x，于是有

$$am^2-xm+a^3-ax=0$$

这是一个关于 m 的一元二次方程，且 m 为实数，则必有

$$x^2-4a^2(a^2-x)\geqslant 0$$

即得
$$(x+2a^2)^2\geqslant 8a^4$$

则
$$x+2a^2\geqslant 2\sqrt{2}a^2,x\geqslant 2(\sqrt{2}-1)a^2$$

故
$$\frac{1}{2}(m+n)=\frac{1}{2}x\geqslant(\sqrt{2}-1)>0.4a^2=\frac{2}{5}a^2$$

再由结论 2(1)知

$$CM+CN>MN=BM+DN$$

则 $$2(CM+CN)>(CM+CN)+(BM+DN)=BC+CD=2a$$

则 $$CM+CN>a$$

而 $$S_{AMCN}=S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}AB\cdot CM+\frac{1}{2}AD\cdot CN=\frac{1}{2}(CM+CN)>\frac{a}{2}$$

又由于 $$(CM+CN)^2\leqslant 2(CM^2+CN^2)=2MN^2$$

则 $$CM+CN\leqslant\sqrt{2}MN$$

即 $$CM+CN\leqslant\sqrt{2}(BM+DN)$$

即 $$(\sqrt{2}+1)(CM+CN)\leqslant\sqrt{2}(BM+DN+CM+CN)=$$
$$\sqrt{2}(BC+CD)=2\sqrt{2}a$$

则 $$CM+CN\leqslant 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a=(4-2\sqrt{2})a$$

于是 $$S_{AMCN}=\frac{1}{2}(CM+CN)a\leqslant(2-\sqrt{2})a^2<0.6a^2=\frac{3}{5}a^2$$

(5)由结论2(5)知,B、E、F、D 共线,则 O 为 BD 的中点,故 O 为正方形 $ABCD$ 的中心.由结论3(3)即知,有 $S_{\triangle AMN}=2S_{\triangle AEF}$.或者,在等腰 Rt$\triangle AMF$ 中,可知 $AM=\sqrt{2}AF$,同理 $AN=\sqrt{2}AE$,从而

$$\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{AE}=\sqrt{2},\angle MAN=\angle FAE$$

则 $$\triangle AMN\backsim\triangle AFE$$

故 $$S_{\triangle AMN}:S_{\triangle AFE}=AM^2:AF^2=2$$

即 $$S_{\triangle AMN}=2S_{\triangle AFE}$$

(6)由 A、M、C、Q 四点共圆,知$\angle AQM=\angle ACM=45°$(图略),故 $AM=MQ$.

注 由上述结论,我们又可知,如下任何一个条件可推出其他条件:

(i)$\angle MAN=45°$.

(ii)AM 平分$\angle BMN$,AN 平分$\angle DNM$.

(iii)$AH=MN$(H 为 $AH\perp MN$ 的垂足).

(iv)$BM=MH$,$NH=ND$.

(v)$AM\cdot AN=MN\cdot BD$.

…

由上述结论,可得如下一系列推论.

推论1 设点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上,联结 AM、AN、MN,且$\angle MAN=45°$.如图7.49所示,则

(1) $BM\cdot DN=BC^2-BC\cdot MN$.

(2)作 $AH\perp MN$ 于 H,有 $AH=AD$.

(3)作 $MF\perp AN$ 于 F 时,知 F 为 $\triangle AMC$ 的外心;作 $NE\perp AM$ 于 E 时,知 E 为 $\triangle ANC$ 的外心,且 $\angle CFN=2\angle BAM$, $\angle CEM=2\angle DAN$.

证明 (1)由结论2(3)及结论2(1)知

$$BM\cdot DN=BC^2-BC(BM+DN)=BC^2-BC\cdot MN$$

(2)由结论2(5)的证明即得知.

(3)如图7.50,注意 $\angle MAN=45^\circ$ 及

$$\triangle ABF\cong\triangle BCF,\triangle ADE\cong\triangle CDE$$

即知 $$AF=MF=CF,AE=NE=CE$$

从而 F、E 分别为 $\triangle AMC$、$\triangle ANC$ 的外心.由此可知

$$\angle CFN=2\angle BAM,\angle CEM=2\angle DAN$$

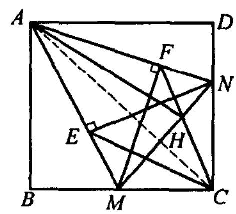


图7.50

注 由推论1(2),知

$$S_{\triangle MAN}=\frac{1}{2}MN\cdot AH=\frac{1}{2}MN\cdot AB$$

于是,可推论如下竞赛题.

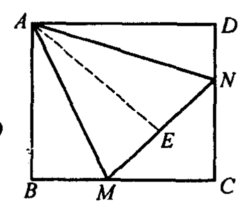


图7.51

如图7.51,设 $ABCD$ 为正方形, M 在 BC 上, N 在 CD 上,且 $\angle MAN=45^\circ$,求证: $S_{ABCD}:S_{\triangle MAN}=2AB:MN$.

(1997年上海市初中竞赛题)

由推论(1)3,知 B、E、F、D 共线且 E、M、C、N、F 五点共圆.于是可得如下两道竞赛题:

设 E、F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点, AE、AF 分别与对角线 BD 交于 P、Q 两点,且 $BE+DF=EF$.求证:五边形 $PECFQ$ 内接于圆.

(第29届IMO加拿大国家培训题)

等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$,点 D 和 E 为边 BC 上的两点,且 $\angle DAE=45^\circ$, $\triangle ADE$ 的外接圆分别交边 AB、AC 于点 P、Q.求证: $BP+CQ=PQ$.

(第52届波兰数学奥林匹克(第一轮试题))

推论2 设点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上,正方形 $ABCD$ 被两条与边平行的线段 MG、NH 分割成四个小矩形, P 是 MG、NH 的交点,联结 AM、AN,则 $\angle MAN=45^\circ$ 的充要条件是 $S_{PMCN}=2S_{AHPG}$.

事实上,由结论2(3),知

$$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow BC^2=BC(BM+DN)+BM\cdot DN\Leftrightarrow MC\cdot NC=$$
$$(BC-BM)(BC-DN)=BC^2-BC(BM+DN)+BM\cdot DN=$$

$$BM\cdot DN+BM\cdot DN=2BM\cdot DN=2AG\cdot AH\Leftrightarrow$$
$$S_{PMCN}=2S_{AHPG}$$

注　由推论2,可看到如下竞赛题的背景:

如图7.52,正方形 $ABCD$ 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割成四个小矩形,P 是 EF 和 GH 的交点.若矩形 $PFCH$ 的面积是矩形 $AGPE$ 的面积的两倍,试确定 $\angle HAF$ 的大小,并证明你的结论.

(1998年北京市中学生竞赛复赛题)

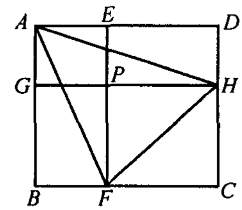


图7.52

推论3　如图7.53,设点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上,延长 AN 交 $\angle C$ 的外角平分线于点 Q,则 $\angle MAN=45°$ 的充要条件是 $AM\perp MQ$.

事实上,由结论3(6)知,当 $\angle MAN=45°$,有 $AM=MQ$,从而 $\angle AQM=45°$,故 $\angle AMQ=90°$,即 $AM\perp MQ$.

反之,由 $AM\perp MQ$,及 $AC\perp CQ$,可知 A、M、C、Q 四点共圆,从而

$$\angle MAN=\angle MAQ=\angle QCT=45°$$

(T 为 BC 延长线上的点)

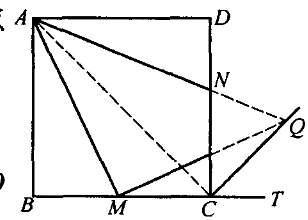


图7.53

注　结论3(6)还可以推广到更一般的情形①:

推广1　如图7.54,在正 n 边形 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}$ 中,P 是边 A_1A_2 上任意一点,作 $\angle APQ=\angle A_1$,PQ 交 $\angle A_1A_2A_3$ 的外角 $\angle A_3A_2M$ 的平分线于 Q,则 $AP=PQ$.

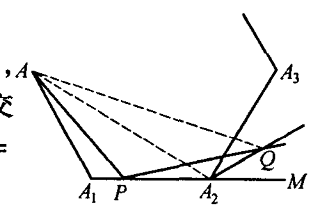


图7.54

证明　联结 AA_2、AQ.因

$$\angle APQ=\angle A_1=\frac{(n-2)180°}{n},AA_1=A_1A_2$$

则
$$\angle AA_2A_1=\frac{1}{2}(180°-\angle A_1)=\frac{180°}{n}$$

又因
$$\angle A_3A_2Q=\frac{1}{2}\angle A_3A_2M=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}=\frac{180°}{n}$$

则
$$\angle AA_2A_1=\angle A_3A_2Q$$

即
$$\angle AA_2Q=A_1A_2A_3=\angle APQ$$

从而 A、P、A_2、Q 四点共圆;$\angle AQP=\angle AA_2A_1$,从而

① 张焕明.正多边形的一个性质[J].数学教学研究,1986(4):封二.

$$\angle QAP=180^\circ-(\angle APQ+\angle AQP)=180^\circ-\frac{n-2}{n}180^\circ-\frac{180^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}$$

故
$$\angle QAP=\angle AQP,AP=PQ$$

推论 4 点 M、N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB、DC 的延长线上，则 $\angle MAN=45^\circ$ 的充要条件是 $MN=DN-BM$.

证明 如图 7.55，将 $Rt\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得 $Rt\triangle ADM'$，显然 M' 在 DN 上，于是

$$\angle MAN=45^\circ\Leftrightarrow\angle MAN=\angle M'AN\Leftrightarrow\triangle AMN\cong\triangle AM'N\Leftrightarrow$$
$$MN=M'N\Leftrightarrow MN=DN-BM$$

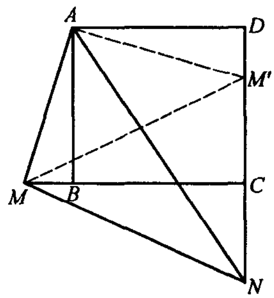


图 7.55

注 结论 2(1)以及上述推论 4 均可推广到更一般情形①：

推广 2 在正 $2n$(n 为不小于 2 的自然数)边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 中，E 在 $A_{n+1}A_n$ 上，F 在 $A_{n+2}A_n$ 上，那么

$$\angle EA_1F=(\frac{90}{n})^\circ\Leftrightarrow EF=A_{n+2}F+A_nE$$

证明 如图 7.56，将 $Rt\triangle A_1A_nE$ 绕 A_1 逆时针旋转 $(\frac{180}{n})^\circ$ 得 $Rt\triangle A_1A_{n+2}E'$，则 E'、A_{n+2}、F 三点共线. 从而有

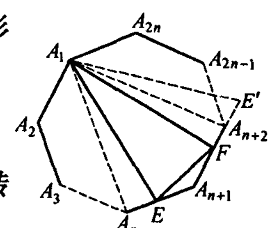


图 7.56

$$\angle EA_1F=(\frac{90}{n})^\circ\Leftrightarrow\angle E'A_1F=\angle EA_1F\Leftrightarrow\triangle AEF\cong\triangle AE'F\Leftrightarrow EF=E'F\Leftrightarrow$$
$$EF=A_nE+FA_{n+2}$$

证毕.

下面这道《数学通报》1995 年第 3 期数学问题第 941 题：在正六边形 $ABCDEF$ 中，M、N 为 DC、DE 上的点，且 $MN=CM+EN$，试求 $\angle MAN$ 的大小. 便是上述推广 2 当 $n=3$ 时的特例.(具体解略，答案为 $\angle MAN=30^\circ$).

由上述推论 3 与推广 2 可得.

推广 3 在正 $2n$(n 为不小于 3 的自然数)边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 中，E 在 $A_{n+1}A_n$ 的延长线上，F 在 $A_{n+2}A_{n+1}$ 的延长线上，那么

$$\angle EA_1F=(\frac{90}{n})^\circ\Leftrightarrow EF=A_{n+2}F-A_nE$$

① 曹兵. 一个定理的应用及推广[J]. 中学数学，1996(4):45-46.

证明略.

练　习　题

1. 已知 $ABCD$ 是正方形，$DE=\frac{EC}{2}$，$BF=\frac{FD}{2}$，请判断 $\triangle AFE$ 的形状，并给出你的证明.

2. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AP\perp BC$，$\angle BAC=45°$，$BP=3$，$CP=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

3. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGH$ 中，AP 是斜边 GH 上的高，过 $\triangle APG$ 与 $\triangle APH$ 的内心 M 与 N 的直线分别交 AG、AH 于 B、D，AM 及 AN 的延长线分别交 GH 于 E、F，求证：$EF=DF+BE$.

练习题解答

1. 延长 AF 交 BC 于 G，联结 EG. 由 $BF=\frac{FD}{2}$，$AD/\!/BG$，知 $BG=\frac{BC}{2}$.

设 $AB=6a$，则

$$DE=2a, BG=3a, EC=4a, CG=3a, EG=\sqrt{EC^2+CG^2}=5a$$

则 $EG=DE+BG$，故 $\angle EAF=45°$，又 $\angle EDF=45°$，则 A、F、E、D 四点共圆，即

$$\angle AFE=180°-\angle EDA=90°$$

故 $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形.

2. 设 E、G 分别为点 P 关于 AB、AC 的对称点，EB、GC 的延长线交于 F.

由 $\angle BAC=45°$，得 $\angle EAG=90°$，故四边形 $AEFG$ 为正方形.

现设 $AP=x$，则由正方形的面积与各三角形面积关系得

$$x^2=2\left(\frac{3x}{2}+\frac{2x}{2}\right)+\frac{(x-3)(x-2)}{2}$$

解得 $x=6$（$x=-1$ 不合题意，舍去）.

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot AP\cdot BC=15$（面积单位）.

3. 因 M 在 $\mathrm{Rt}\triangle APG$ 的内心，故 $\angle MPF=135°$. 现由 $\angle MPF+\angle MAF=180°$ 得四点 A、M、P、F 共圆，于是 $\angle AFM=\angle APM=45°$，从而 $FM\perp AE$. 同理可证 $EN\perp AF$，故有四点 A、M、I、N 共圆（I 为 EN 与 FM 的交点），因此，$\angle NMI=\angle PAF$.

又由$\angle PAF=\angle DAF$得$\angle NMI=\angle DAF$,从而四点A、M、F、D共圆,故$\angle ADM=\angle AFM=45°$且$\angle ADF=90°$,于是$AB=AD$.同理可证$\angle ABC=90°$.故四边形$ABCD$为正方形,$EF=DF+BE$.

附　录

下面的一个图形的多彩结论,是江苏姜堰市梁徐中学的两位老师[①]的探求诸多结论的思维过程的展现.值得一读,摘抄如下:

题设　如图7.57,过正方形$ABCD$的顶点A作45°的角与CB、DC的延长线分别交于E、F两点,即$\angle EAF=45°$;DB、AE的延长线交于点O_1;DB、AF交于点O_2;O_2E、FO_1的延长线交于点O;EO_2的延长线交DF于点P.联结AO,FE的延长线交AO于点H,又DO_1、EF交于点O_3,联结O_1H、O_2H、AP.

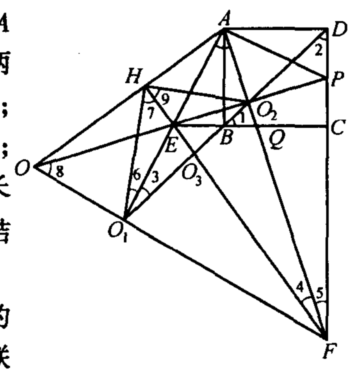


图7.57

根据题设,探求结论.抓住正方形及45°角的有利条件,由浅入深,由表及里,层层推进;类比联想,相互渗透,不断创新.

1.美妙的四点共圆相继出现

首先,如图7.57,$\angle 1=\angle EAF=45°$,即有A、E、B、O_2四点共圆;同样$\angle 2=\angle EAF=45°$,则A、O_1、F、D四点共圆;由上述四点共圆知

$$\angle AO_2E=\angle ABE=90°,\angle AO_1F=\angle ADF=90°$$

所以,E、O_1、F、O_2四点共圆.

又在$\triangle AOF$中,因为$OO_2\perp AF$,$AO_1\perp OF$,所以E为$\triangle AOF$的垂心,这样六个四点共圆相继出现,即(A、H、E、O_2),(E、H、O、O_1),(E、O_1、F、O_2),(A、O、O_1、O_2),(O、F、O_2、H),(F、A、H、O_1).

由于$FH\perp AO$,所以(A、H、E、B),(A、H、F、D)均四点共圆;仔细观察,显然(A、O_2、P、D),(O_2、Q、C、P)亦四点共圆,还有(E、O_1、F、D)也是四点共圆.

2.线段间的关系,面积间的关系精彩纷呈

由上述四点共圆有$\angle 3=\angle 4$,$\angle 4=\angle 5$,则$\angle 4=\angle 5$,又$FH\perp AH$,$FD\perp AD$,所以$AH=AD$,就是说点A到EF的距离恰好等于正方形的边长.

① 刘华明,周金生.一个图形的多彩结论[J].中学生数学,1998(10):19.

随之有

$$FH=FD, EF=PF, EO_2=PO_2, HO_2=DO_2, AE=AP$$

因为 $\mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle ABE, \mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADP$

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADP$

于是 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADP}$

所以 $EF=DF-BE$

即 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}-S_{\triangle ABE}$

同时有 $\dfrac{AO_2}{AE}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{AO_3}{AE}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

进一步得到 $\triangle AO_1O_2\backsim\triangle AFE$

所以 $\dfrac{S_{\triangle AO_1O_2}}{S_{\triangle AFE}}=\dfrac{\frac{1}{2}AO_1\cdot AO_2\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}AF\cdot AE\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$

因为 $\angle O_2OF=\angle O_1AO_2=45^\circ$

所以 $O_2O=O_2F$

3.众多特殊点汇聚一图,引人入胜

由诸多四点共圆即有

$$\angle 6=\angle 4, \angle 3=\angle 5, \angle 4=\angle 5$$

所以 $\angle 3=\angle 6$

又 $\angle 7=\angle 8=45^\circ, \angle 9=\angle EAO_2=45^\circ$

所以 $\angle 7=\angle 9$

故 E 为$\triangle HO_1O_2$的内心.即三角形的垂心为垂足三角形的内心,可谓点 E 身兼二职.

显然点 O 为$\triangle AEF$的垂心.由于 $O_2A=O_2E=O_2P$,所以 O_2 为$\triangle AEP$的外心.

由前所知$\angle 4=\angle 5, \angle AEH=\angle AEB$,所以点 A 为$\triangle ECF$的旁心.旁心指三角形一内角平分线与另两个角的外角平分线的交点.

4.高层次追求,深层次挖掘,设计出新颖别致的趣题,令人耳目一新

即如图7.56给出的条件,则有结论

$$BO_1^2+DO_2^2=O_1O_2^2$$

尽管该题难度大,但由于以上系统研究,参照对比,触类旁通,问题解决已近在咫尺.

略证,如图7.57有

$$\angle O_1HO_2 = \angle 7 + \angle 9 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

所以
$$HO_1^2 + HO_2^2 = O_1O_2^2$$

而
$$HO_1 = BO_1, HO_2 = DO_2$$

所以
$$BO_1^2 + DO_2^2 = O_1O_2^2$$

这是数学开放题,是用构造法解题的范例,是用发现法研究问题的典型,认真回味,其乐无穷.

第 8 章　1986 ~ 1987 年度试题的诠释

试题 A　已知锐角△ABC 的外接圆半径是 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上. 求证：AD、BE、CF 是△ABC 的三条高的充要条件是 $S=\frac{1}{2}R\cdot(EF+FD+DE)$，式中 S 是△ABC 的面积.

证明　设△ABC 的外接圆的圆心为 O，三个内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$.

因△ABC 是锐角三角形，则点 O 在△ABC 内.

必要性的证明：

证法 1　如图 8.1，联结 OA、OB、OC、OD、OE、OF，于是

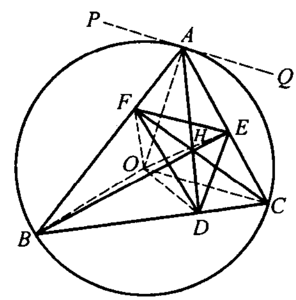


图 8.1

$$S_{\triangle ABC}=S_{OEAF}+S_{OFBD}+S_{ODCE}$$

过点 A 作圆 O 的切线 PQ，则 $OA\perp PQ$，$\angle PAB=\angle ACB$. 又 B、C、E、F 四点共圆，则 $\angle ACB=\angle AFE$. 从而 $\angle PAB=\angle AFE$. 则 $PQ /\!/ FE$，$OA\perp FE$，于是

$$S_{OEAF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF$$

同理
$$S_{OFBD}=\frac{1}{2}OB\cdot FD,\ S_{ODCE}=\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

从而
$$S=\frac{1}{2}(OA\cdot EF+OB\cdot FD+OC\cdot DE)=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

证法 2　如图 8.2，联结 AO 并延长交圆 O 于 G，联结 BG，则

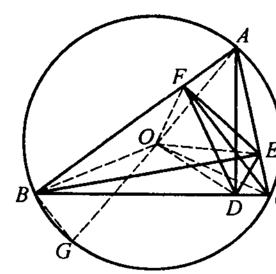


图 8.2

$$\angle BAG+\angle BGA=90^\circ,\ \angle BGA=\angle ACB$$

由 B、C、E、F 四点共圆，得

$$\angle AFE=\angle ACB=\angle BGA$$

即
$$\angle BAG+\angle AFE=90^\circ$$
则 $AO\perp EF$.同理,$BO\perp FD$,$CO\perp DE$.故
$$S_{\triangle ABC}=S_{AFOE}+S_{BDOF}+S_{CDOE}=\frac{1}{2}(EF\cdot OA+FD\cdot OB+DE\cdot OC)=$$
$$\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)$$

证法3
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=$$
$$R(R\sin A\cos A+R\sin B\cos B+R\sin C\cos C)=$$
$$\frac{R}{2}(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$
由 B、C、E、F 四点共圆,故$\angle AFE=\angle ACB$,则
$$\triangle AFE\backsim\triangle ACB$$

从而
$$\frac{FE}{BC}=\frac{AF}{AC}=\cos A$$
即
$$EF=a\cos A$$
同理
$$FD=b\cos B,DE=c\cos C$$
从而
$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

证法4 如图 8.3,作 D 关于 AB、AC 的对称点D'和D'',则 $AD'=AD=AD''$,$\angle 2=\angle 3$,$DF=D'F$,$DE=ED''$.

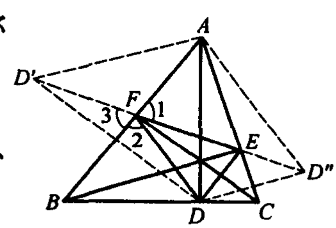


图 8.3

由于 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 三条高,所以 E、F、C、B 四点共圆,F、A、C、D 四点共圆,得$\angle 1=\angle ACB$,$\angle 3=\angle ACB$,则有$\angle 1=\angle 3$.因此$\angle 1=\angle 2$,D'、F、E 共线.同理可知 F、E、D''共线.所以 D'、F、E、D''四点共线.则
$$DF+FE+ED=D'F+FE+ED''=D'D''$$
又在$\triangle D'AD''$中
$$\angle D'AD''=2\angle CAB,\frac{D'D''}{2}=AD'\sin\angle BAC$$
故在$\triangle ABC$ 中,有

$$S=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}AD\cdot 2R\sin\angle BAC=R\cdot AD'\sin\angle BAC=$$

$$R\cdot\frac{D'D''}{2}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

证法 5①　如图 8.4,联结 OA、OB、OC,设 EF、CF 与 OA 分别交于 G、P,ED 与 OC 交于 K,FD 与 OB 的延长线交于 L.

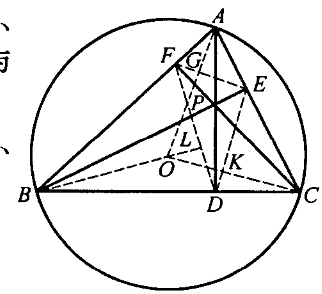


图 8.4

这时 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高,所以 B、C、E、F 四点共圆,即有

$$\angle GFP=\angle EBC$$

而

$$\angle EBC=90^\circ-\angle C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle AOB=$$

$$90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle BAO)=\angle BAO$$

即

$$\angle GFP=\angle BAO$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFP$ 中

$$\angle FAP+\angle FPA=90^\circ$$

即

$$\angle GFP+\angle FPA=90^\circ$$

所以 $OA\perp EF$,垂足为 G.

同理可证 $OB\perp DF$,垂足为 L;$OC\perp DE$,垂足为 K.

又因 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则点 O 在 $\triangle ABC$ 内,而 $\triangle AOB$、$\triangle AOC$、$\triangle BOC$ 都是以外接圆半径 R 为腰的等腰三角形,设三个三角形的腰上的高分别为 h_1、h_2、h_3,根据等腰三角形的性质可知

$$h_1=FG+FL,h_2=EG+EK,h_3=DK+DL$$

于是 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}Rh_1+\frac{1}{2}Rh_2+\frac{1}{2}Rh_3=\frac{1}{2}R(h_1+h_2+h_3)=$$

$$\frac{1}{2}R(FG+FL+EG+EK+DK+DL)=$$

$$\frac{1}{2}R[(EG+FG)+(FL+DL)+(EK+DK)]=$$

$$\frac{1}{2}R(EF+FD+ED)$$

① 刘景升.数学题集锦[J].中学数学教学,1982(2):35-36.

证法6[①] 如图 8.5,设三条高 AD、BE、CF 相交于点 H,从而知 C、D、H、E 四点共圆,CH 为该圆直径,则由正弦定理可得

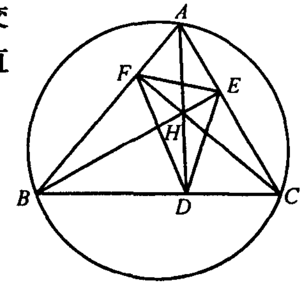


图 8.5

$$DE = CH \cdot \sin C$$

又
$$R = \frac{AB}{2\sin C}$$

则 $R \cdot DE = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}AF \cdot CH + \frac{1}{2}BF \cdot CH = S_{\triangle ACH} + S_{\triangle BCH}$

同理
$$R \cdot EF = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH}$$
$$R \cdot FD = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle BCH}$$

故 $R \cdot DE + R \cdot EF + R \cdot FD = 2(S_{\triangle ACH} + S_{\triangle BCH} + S_{\triangle ABH})$

即
$$R(DE + EF + FD) = 2S$$

证法7 如图 8.6,分别作点 D 关于 AB、AC 的对称点 D_1、D_2,联结 D_1F、D_2E、AD_1、AD_2,由对称性易知 D_1、F、E、D_2 四点共线,且

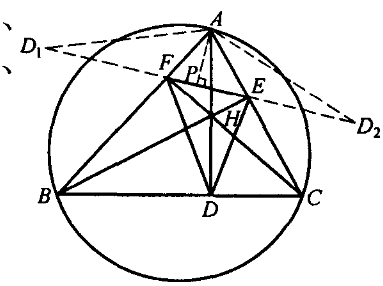


图 8.6

$$D_1D_2 = DE + EF + FD, AD_1 = AD_2 = AD$$

令 AD 为 h,$\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC$.

作 $AP \perp D_1D_2$ 于 P,则

$$D_1P = \frac{1}{2}D_1D_2 = \frac{1}{2}(DE + EF + FD)$$

且
$$\angle D_1AP = \frac{1}{2}\angle D_1AD_2 = \angle BAC$$

于是,有

$$\sin\angle BAC = \sin\angle D_1AP = \frac{D_1P}{AD_1} = \frac{\frac{1}{2}(DE + EF + FD)}{h}$$

在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理,知 $\sin\angle BAC = \frac{BC}{2R}$,所以

① 吴中强,朱汉林.一道竞赛题的另两种证法[J].中学数学月刊,1997(10):44.

$$\frac{\frac{1}{2}(DE+EF+FD)}{h}=\frac{BC}{2R}$$

即
$$R(DE+EF+FD)=BC\cdot h=2S$$

证法 8[①]　由射影定理有

$$DC=AC\cos C, EC=BC\cos C$$

在$\triangle DCE$中应用余弦定理,有

$$DE^2=DC^2+EC^2-2DC\cdot EC\cos C=AC^2\cos^2C+BC^2\cos^2C-2AC\cdot BC\cdot\cos^3C=$$
$$\cos^2C(AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C)=AB^2\cos^2C$$

由$\triangle ABC$是锐角三角形,知 $\cos C>0$.则 $DE=AB\cos C$,即 $DE=c\cos C$.同理

$$EF=a\cos A, FD=b\cos B$$

在$\triangle ABC$中
$$c=2R\sin C, b=2R\sin B, a=2R\sin A$$

代入
$$\frac{R}{2}(DE+EF+FD)=\frac{R}{2}(c\cos C+a\cos A+b\cos B)=$$
$$\frac{R}{2}(2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C)=$$
$$\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=$$
$$\frac{R^2}{2}(4\sin A\sin B\sin C)=$$
$$\frac{1}{2}[(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C=$$
$$\frac{1}{2}ba\sin C=S$$

证法 9　同证法 3 中求法知

$$EF=a\cos A, FD=b\cos B, DE=c\cos C$$

又
$$\angle BAO=\angle ABO, \angle CBO=\angle BCO, \angle ACO=\angle CAO$$
$$\angle BAO+\angle ABO+\angle CBO+\angle BCO+\angle ACO+\angle CAO=180^\circ$$

则
$$\angle BAO+\angle CAO+\angle CBO=90^\circ$$

已知$\triangle ABC$是锐角三角形,则

$$\cos A=\cos(\angle BAO+\angle CAO)=\cos(90^\circ-\angle CBO)=\sin\angle CBO$$

① 证法 8～13 可参见:戴宏祥.1986 年全国高中联赛第二试第二题必要性的几种证法[J].中等数学,1987(1):23-26.

同理 $\cos B=\sin\angle ACO,\cos C=\sin\angle BAO$

故 $S=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle ACO}+S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle BAO+$

$\frac{1}{2}OC\cdot AC\sin\angle CAO+\frac{1}{2}OB\cdot BC\sin\angle CBO$

$\frac{1}{2}Rc\sin\angle BAO+\frac{1}{2}Rb\sin\angle ACO+\frac{1}{2}Ra\sin\angle CBO=$

$\frac{1}{2}Rc\cos C+\frac{1}{2}Rb\cos B+\frac{1}{2}Ra\cos A=$

$\frac{1}{2}R\cdot DE+\frac{1}{2}R\cdot FD+\frac{1}{2}R\cdot EF=\frac{R}{2}(DE+EF+FD)$

证法 10 设 $AF=x$. $\triangle AFE\backsim\triangle ACB$,有

$$\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC},EF=AF\cdot\frac{BC}{AC},EF=x\cdot\frac{a}{b}$$

同理
$$\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$$

则
$$AE=x\cdot\frac{c}{b}$$

$$CE=AC-AE=b-\frac{c}{b}x$$

因$\triangle BOF\backsim\triangle BAC$,有

$$\frac{BF}{BC}=\frac{DF}{AC},DF=\frac{b}{a}(c-x)$$

因$\triangle CED\backsim\triangle CBA$,有

$$\frac{CE}{ED}=\frac{BC}{AB}$$

则
$$ED=\frac{AB}{BC}\cdot CE=\frac{c}{a}(b-\frac{c}{b}x)$$

又 $x=b\cos A$ 和 $R=\frac{a}{2\sin A}$,故

$$\frac{R}{2}(EF+FD+DE)=\frac{R}{2}\left[\frac{a}{b}x+\frac{b}{a}(c-x)+\frac{c}{a}(b-\frac{c}{b}x)\right]=$$

$$\frac{R}{2}\left[\frac{ax^2+2b^2c-b^2x-c^2x}{ab}\right]=$$

$$\frac{R}{2}\left[\frac{(a^2-b^2-c^2)x+2b^2c}{ab}\right]=$$

$$\frac{R}{2}\left[\frac{-2bc(\cos A)x+2b^2c}{ab}\right]=$$

$$R\left[\frac{bc+c(\cos A)x}{a}\right]=R\left(\frac{bc-bc\cos^2 A}{a}\right)=$$

$$\frac{Rbc\sin^2 A}{a}=\frac{1}{2}bc\sin A=S$$

证法 11　设$\triangle ABC$ 的垂心为 H. 由 B、F、H、D 四点共圆,在$\triangle BFD$ 中

$$\frac{FD}{\sin B}=BH, FD=BH\sin B$$

在$\triangle ABC$ 中
$$\sin B=\frac{b}{2R}$$

故
$$FD=\frac{b\cdot BH}{2R}$$

同理
$$EF=\frac{a\cdot AH}{2R}, DE=\frac{c\cdot CH}{2R}$$

又
$$BH=BE-HE, AH=AD-HD, CH=CF-HF$$

有
$$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}(a\cdot HD+b\cdot HE+c\cdot HF)$$

$$3S=\frac{1}{2}b\cdot BE+\frac{1}{2}a\cdot AD+\frac{1}{2}c\cdot CF$$

故
$$\frac{R}{2}(EF+FD+DE)=\frac{R}{2}\left(\frac{a\cdot AH}{2R}+\frac{b\cdot BH}{2R}+\frac{c\cdot CH}{2R}\right)=$$

$$\frac{R}{2}\cdot\frac{a(AD-HD)+b(BE-HE)+c(CF-HF)}{2R}=$$

$$\frac{1}{4}[a\cdot AD+b\cdot BE+c\cdot CF-$$

$$(a\cdot HD+b\cdot HE+c\cdot HF)]=\frac{1}{4}(6S-2S)=S$$

证法 12　由 A、B、D、E 共圆,知

$$\angle CDE=\angle A, \angle CED=\angle B$$

在$\triangle DCE$ 中
$$\frac{DE}{\sin C}=\frac{CE}{\sin A}=\frac{CD}{\sin B}$$

有
$$\frac{DE^2}{\sin^2 C}=\frac{CE\cdot CD}{\sin A\sin B}=\frac{a\cos C\cdot b\cos C}{\sin A\sin B}$$

从而
$$DE^2=\frac{ab\sin^2 C\cos^2 C}{\sin A\sin B}=(2R)^2\sin^2 C\cos^2 C$$

因△ABC 是锐角三角形,则

$$DE=2R\sin C\cos C=\frac{c}{\sin C}\sin C\cos C=c\cos C$$

同理

$$EF=a\cos A,DF=b\cos B$$

$$\frac{R}{2}(DE+EF+FD)=$$
$$\frac{R}{2}(c\cos C+a\cos A+b\cos B)=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{4S}(c\cos C+a\cos A+b\cos B)=$$
$$\frac{abc^2\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+a^2bc\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b^2ac\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{8S}=$$
$$\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)+a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)}{16S}=$$
$$\frac{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16S}$$

因

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=$$
$$\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)$$
$$(a-b+c)(-a+b+c)=$$
$$\frac{1}{16}(2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)$$

故

$$\frac{R}{2}(DE+EF+FD)=S$$

证法 13 如图 8.7,作点 E 关于 BC、BA 的对称点 N、M.

因△ABC 的垂心是垂足△DEF 的内心,则$\angle 1=\angle 2$.又 E、N 关于 CD 对称,则$\angle 3=\angle 4$.

由 $AD\perp BC$,知$\angle 2+\angle 3=90°$,有$\angle 1+\angle 4=90°$,即

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$$

故点 N 在直线 FD 上,同理点 M 也在直线 DF 上.

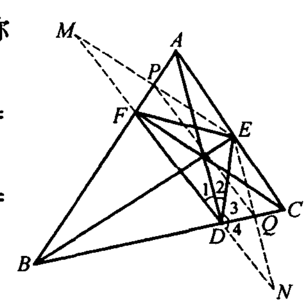


图 8.7

在$\triangle EMN$中，$DE=DN$，$FE=FM$，EM、EN分别和AB、BC交于P、Q.有中位线

$$PQ=\frac{1}{2}MN \qquad ①$$

在$\triangle ABC$中

$$2\sin B=\frac{b}{R} \qquad ②$$

由轴对称，$EP\perp AB$，$EQ\perp BC$，故B、Q、E、P四点共圆，有

$$\frac{PQ}{\sin B}=BE$$

即

$$PQ=BE\sin B \qquad ③$$

由①，②得

$$\frac{1}{2}MN=BE\sin B$$

即

$$\frac{MN}{BE}=2\sin B \qquad ④$$

由②，④得

$$2\sin B=\frac{MN}{BE}=\frac{b}{R}$$

则

$$b\cdot BE=R\cdot MN$$

$$\frac{1}{2}b\cdot BE=\frac{R}{2}(MF+FD+DN)$$

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

充分性的证明：设

$$S_{\triangle ABC}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

证法 1　先证$OA\perp EF$.用反证法.若OA与EF不垂直，则

$$S_{OEAF}<\frac{1}{2}OA\cdot EF$$

又

$$S_{OFBD}\leqslant\frac{1}{2}OB\cdot FD,S_{ODCE}\leqslant\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

则

$$S_{\triangle ABC}<\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$$

这和已知的条件矛盾,故 $OA \perp EF$.同理 $OB \perp FD$, $OC \perp DE$.过点 A 作圆 O 的切线 PQ,则 $OA \perp PQ$.因 $OA \perp EF$,则 $PQ /\!/ EF$,即

$$\angle AFE = \angle PAF = \angle ACB$$

故 B、C、E、F 四点共圆,同理 A、B、D、E 四点共圆,C、A、F、D 四点共圆.则

$$\angle ADB = \angle AEB(A、B、D、E\text{ 四点共圆})$$

$$\angle ADC = \angle AFC(A、C、D、F\text{ 四点共圆})$$

于是

$$\angle AEB + \angle AFC = 180^\circ$$

又 B、C、E、F 四点共圆,$\angle AEB = \angle AFC$,则

$$\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ, \angle ADC = \angle AFC = 90^\circ$$

即

$$AD \perp BC, BE \perp CA, CF \perp AB$$

证法 2 设 AD'、BE'、CF' 是 $\triangle ABC$ 的三条高,由必要性证法中证明知

$$OA \perp F'E', OB \perp D'F', OC \perp D'E'$$

又设点 D、E、F 分别在 BC、CA、AB 上,使

$$S_{\triangle ABC} = \frac{R}{2}(EF + FD + DE)$$

由充分性证明中的证法 1 知

$$OA \perp FE, OB \perp DF, OC \perp DE$$

则

$$FE /\!/ F'E', DF /\!/ D'F', DE /\!/ D'E'$$

若点 F' 与 F 不重合,不妨设 $AF' < AF$,则

$$AE' < AE \Rightarrow CE' > CE \Rightarrow CD' > CD$$

又

$$AF' < AF \Rightarrow BF' > BF \Rightarrow BD' > BD$$

从而 $BC > BC$,矛盾.于是点 F 与 F' 重合.同理点 E 与点 E' 重合,点 D 与点 D' 重合,故 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高.

证法 3 用反证法,若 $\triangle DEF$ 不是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形,设 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 $\triangle D_1E_1F_1$,则

$$DF + EF + FD > D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_1 \quad ①$$

由必要性知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}R(D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_1)$$

又由假设式条件

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}R(DE + EF + FD)$$

$$DE + EF + FD = D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_1$$

与式①矛盾.所以,$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.

证法 4　如图 8.8.因为

$$S=\frac{1}{2}R(DE+EF+FD)$$

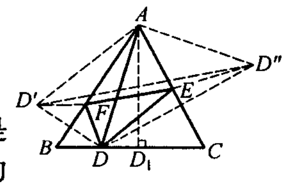


图 8.8

如果 D、E、F 三点中有一点不是垂足,不妨设 D 不是垂足.作 $AD_1\perp BC$,垂足为 D_1,作点 D 关于 AB、AC 的对称点 D'、D''.联结 $D'F$、ED'',则有

$$DE+EF+FD=D''E+FE+FD'\geqslant D'D''$$

在$\triangle D'AD''$中

$$\angle D'AD''=2\angle BAC,AD'=AD''=AD$$

$$D'D''=2AD'\sin\angle BAC=2AD\sin\angle BAC$$

由于　$$S=\frac{R}{2}(DE+EF+FD)\geqslant\frac{R}{2}\cdot D'D''=AD\cdot R\sin\angle BAC$$

又　$$S=\frac{1}{2}AD_1\cdot BC=R\cdot AD_1\sin\angle BAC$$

及 $AD>AD_1$,则 $S>S$ 矛盾.

因此,D、E、F 三点都是垂足,AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条高.

证法 5　如图 8.9,设 D、E、F 是三条高的垂足,设 D_1、D_2 分别为点 D 关于 AB、AC 的对称点,则

$$D_1D_2=FD+EF+DE \qquad ①$$

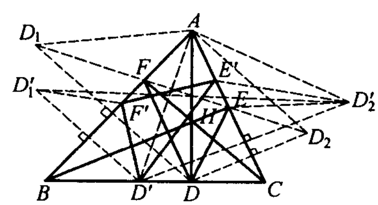


图 8.9

此时即要证当点 D'、E'、F' 分别在锐角$\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上,且 $S=\frac{R}{2}(E'F'+F'D'+D'E')$时,$AD'$、$BE'$、$CF'$ 分别为三边上的高,即证 D'、E'、F' 分别与三边 BC、CA、AB 上的垂线足 D、E、F 重合.

如图 8.9,不失一般性,假设 $D'\neq D$,作出 D' 分别关于 AB、AC 成轴对称的点 D_1'、D_2',联结 $D_1'F'$,$D_2'E'$,$D_1'D_2'$,则

$$E'F'+F'D'+D'E'=E'F'+F'D_1'+D_2'E'\geqslant D_1'D_2' \qquad ②$$

联结 AD'、AD_1'、AD_2',则

$$AD_1'=AD',AD_2'=AD',\angle D_1'AD_2'=\angle ABC$$

在等腰$\triangle AD_1'D_2'$ 与等腰$\triangle AD_1D_2$ 中,由于顶角$\angle D_1'AD_2'=\angle D_1AD_2$,且由 $AD'>AD$知腰 $AD_1'>AD_1$,由相似三角形的性质知,$D_1'D_2'>D_1D_2$.因此,由①、

②,得

$$E'F'+F'D'+D'E'>EF+FD+DE$$

于是 $$S=\frac{R}{2}(E'F'+F'D'+D'E')>\frac{R}{2}(EF+FD+DE)=S$$

矛盾.因此,D'必与D重合,同理可证得:E'必与E重合,F'必与F重合.

证法 6 已知锐角$\triangle ABC$的面积

$$S=\frac{1}{2}R(EF+FD+ED)$$

过F分别作OA、OB的垂线,垂足为M_1、M_2;过E分别OA、OC的垂线,垂足为N_1、N_2;过D分别作OC、OB的垂线,垂足为Q_1、Q_2.

由等腰三角形的性质可知

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R(FM_1+FM_2),S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}R(EN_1+EN_2),S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}R(DQ_1+DQ_2)$$

而$\triangle ABC$的面积

$$S=\frac{1}{2}R(FM_1+FM_2+EN_1+EN_2+DQ_1+DQ_2)=$$
$$\frac{1}{2}R[(FM_1+EN_1)+(FM_2+DQ_2)+(EN_2+DQ_1)]$$

在M_1与N_1、M_2与Q_2、N_2与Q_1中只要有一对不重合,则下面三个不等式

$$FM_1+FN_1<EF,FM_2+DQ_2<FD,EN_2+DQ_1<DE$$

至少有一个不等式成立.于是有

$$S=\frac{1}{2}R[(FM_1+EN_1)+(FM_2+DQ_2)+(EN_2+DQ_1)]<$$
$$\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)=S$$

即$S<S$,这显然是不可能的.所以M_1与N_1、M_2与Q_2、N_2与Q_1分别重合.从而可知

$$EF\perp OA,FD\perp OB,ED\perp OC$$

又在Rt$\triangle AGF$中

$$\angle AFG=90^\circ-\angle FAG=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOB)=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle C$$

则在四边形$EFBC$中一内角等于它对角的外角,可知E、F、B、C四点共圆.

同理可证A、F、D、C四点共圆,B、D、E、A四点共圆.

又因E、F、B、C四点共圆,则

$$\angle BFC = \angle BEC$$

而 $\angle AFC = 180° - \angle BFC, \angle AEB = 180° - \angle BEC$

则 $\angle AFC = \angle AEB$

由 A、F、D、C 四点共圆可得到$\angle AFC = \angle ADC$，由 A、B、D、E 四点共圆可知$\angle AEB = \angle ADB$，则$\angle ADC = \angle ADB$，而

$$\angle ADC + \angle ADB = 180°$$

故 $\angle ADC = \angle ADB = 90°$

即 $AD \perp BC$

同理可证 $AC \perp BE$，$AB \perp FC$.

试题 B1 把边长为 1 的正$\triangle ABC$ 的各边都 n 等分，过各分点作平行于其他两边的直线，将这三角形分成小三角形. 各小三角形的顶点都称为结点. 在每一结点上放置了一个实数，已知：(i) A、B、C 三点上放置的数分别为 a、b、c；(ii)在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数之和相等.

试求：(1)放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r；(2)所有结点上的数的总和 S.

解法 1 考察任意三个最邻近的最小三角形，设放在五个结点处的数分别是 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5，如图 8.10 所示，则有

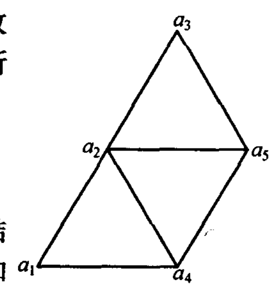


图 8.10

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4, a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

两式相减得到 $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$

这说明沿三族平行线中任意一条线，依次放在该线各结点上的数都成等差数列，据此就能回答题目中的(1)和(2)两问句.

(1)等差数列中最大与最小的数在该数列的两端. 因此各结点所放的数中最大者与最小者都在三角形边界上出现. 以下分几种情形讨论.

情形 1 在 A、B、C 三点上放置的数各不相等，不妨设 $a < b < c$，则各结点放置的数中最大者为 c，最小者为 a，它们之间的距离 $r = 1$.

情形 2 在 A、B、C 三点上放置的数有两个相等，不妨设 $a < b = c$，则所放置的最大数出现在边 BC 的各结点上(都等于 $b = c$)，最小数为点 A 放置的 a，于是

$$r=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & ,n\text{ 为偶数时}\\ \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4n^2}} & ,n\text{ 为奇数时}\end{cases}$$

可参见图 8.11 与图 8.12.

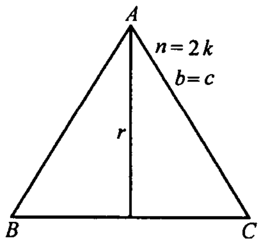


图 8.11

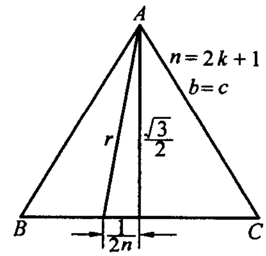


图 8.12

情形 3 在 A、B、C 三点上放置的数都相等,即 $a=b=c$,对这情形显然有

 $r=0$.

(2)知道了一个(有限)等差数列的项数、首项和末项,就能计算出该数列的所有各项.我们可以先算出放置在边 AC 与边 BC 上的各数,然后算出放置在平行于边 AB 那族平行线上的各数,这样求出所有结点上放置的数.再将它们加起来就算出所有结点上放置的数之总和.但更简单的却是如下所述的办法.

设想有三个同样的正三角形,每一个都按题目中的要求在相应的结点上放置同样的数.将第二个三角形沿逆时针方向旋转 120°,第三个三角形沿逆时针方向旋转 240°,再将三个三角形叠在一起,将重叠在同一结点上的各数加起来当作叠合三角形放在该结点上的数,显然题目中所述的"菱形条件"在重叠后仍然得到满足.因为叠合三角形三个顶点上放的数相等,各结点上放置的数也都应等于该数,即 $a+b+c$,所以叠合三角形各结点上放置的数的总和等于

$$(a+b+c)\times\text{结点总数}$$

由此求出原来的$\triangle ABC$ 各结点上放置的数的总和为

$$S=\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$$

解法 2 不失一般性,设 $a\leqslant b\leqslant c$,我们把条件(ii)称为菱形性质,如图 8.13所示,考虑同线相邻的三结点 D、E、F,它们上面放置的数为 d、e、f;再取与 D、E 相邻的结点 G,以及与 G、E、F 相邻的结点 H,它们上面放置的数为 g、

h.根据“菱形性质”有 $g+e=d+h, g+f=e+h$,则 $f-e=e-d$.这表明 D、E、F 上的数成等差数列.

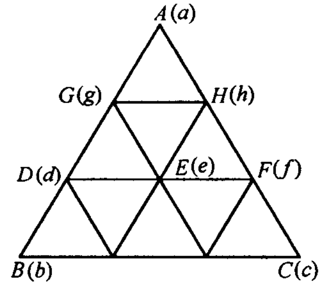


图 8.13

由等差数列的“传递性”易得同一直线的全部结点上的数成等差数列;由等差数列的“边界性”易知,若公差非 0,则等差数列的最大(小)值出现在两端.所以:

(1)若 $a<b<c$,易见每条直线上的最大(小)数在两端,故点 C 放最大数 c,点 A 放最小数 a,$r=1$.若 $a=b<c$,同理可知点 C 放最大数 c,AB 直线上任一结点均放最小数 a,其中与 C 最接近的是 P,当 n 为偶数时,P 为 AB 的中点;当 n 为奇数时,P 为 AB 的第 $\frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{2}$ 个 n 等分点,对前者 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$,对后者 $r=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2n})^2}=\frac{1}{2n}\sqrt{3h^2+1}$.若 $a<b=c$,结果同上.若 $a=b=c$,则所有结点上放同一个数,同时为最大数和最小数,故 $r=0$,综合得

$$r=\begin{cases}1 & ,a、b、c \text{ 全不相等} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & ,a、b、c \text{ 中有两者相等,且 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2n}\sqrt{3n^2+1} & ,a、b、c \text{ 中有两者相等,且 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & ,a=b=c\end{cases}$$

(2)绕 $\triangle ABC$ 的中心把 $\triangle ABC$ 旋转 $120°$,$240°$,$360°$,把三次旋转所得的三个三角形叠合成一个 $\triangle A'B'C'$.$\triangle A'B'C'$ 的结点上放的数是叠合在同一结点的三数之和.则因等差数列具“可加性”(两个等差数列相加仍为等差数列),易知 $\triangle A'B'C'$ 上的每一直线的全部结点上的数仍成等差数列,但此时三顶点 A'、B'、C' 上放置的数均为 $a+b+c$,故所有结点上均放同一个数 $a+b+c$.$\triangle A'B'C'$ 的所有结点上的数的总和为 $3S=N(a+b+c)$,N 为结点总数,即 $N=1+2+\cdots+(n+1)$.故

$$S=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$$

解法 3　考察如图 8.14 所示的形状的图形,其中 α、β、x、y、z 是对应结点上所放置的数,由条件可知

$$\alpha+\gamma=\beta+x,\beta+\gamma=\alpha+z$$

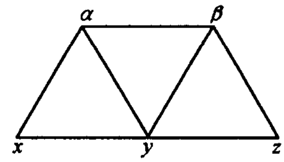


图 8.14

将以上二式相加,得出 $2y=x+z$.由此立知:分布在任何一条直线上的结点上的数值组成等差数列.等差数列的最小值、最大值总是在首、末两项上可以取到,因此,只须在原三角形三边上的结点上的值上来考虑,用同样的推理.只须讨论 a、b、c 的大小.

(i)设 $a=b=c$,这时每一结点上的值既是最大值,也是最小值,距离 $r=0$.

(ii)设 $a\neq b=c$,这时边 BC 上的一切结点所放的数均为 b.当 n 为偶数时,r 应等于顶点 A 到边 BC 的垂直距离,即$\frac{1}{2}\sqrt{3}$;当 n 为奇数时

$$r=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2n})^2}=\frac{\sqrt{3n^2+1}}{2n}$$

(iii)当 a、b、c 互不相等时,$r=1$.

现在来计算和数 S,在边 AB 上,从 A 算起的第 i 个结点上的数值是

$$a+(\frac{i-1}{n})(b-a)=(1-\frac{i-1}{n})a+\frac{i-1}{n}b$$

而在边 AC 上,从 A 算起的第 i 个结点上的值为

$$(1-\frac{i-1}{n})a+\frac{i-1}{n}c$$

因此,在这两个结点的连线上的一切结点上的数的和为

$$\frac{i}{2}\left[(1-\frac{i-1}{n})a+\frac{i-1}{n}b+(1-\frac{i-1}{n})a+\frac{i-1}{n}c\right]=$$

$$i(1-\frac{i-1}{n})a+\frac{b+c}{2n}(i-1)i$$

则上述表达式将 i 从 1 到 $n+1$ 求和,就得到欲求的和数

$$S=a\sum_{i=1}^{n+1}i(1-\frac{i-1}{n})+\frac{b+c}{2n}\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)i=$$

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$$

注 上述解法 1、2 中的(2),其基本思路由上海向明中学潘子刚同学给出,这个解法获该届冬令营特别奖.

试题 B2 在一个面积为 1 的正三角形内部,任意放五个点.试证:在此正三角形内,一定可以作三个正三角形盖住这五个点,这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边,并且它们的面积之和不超过 0.64.

证法 1 由于任意已放置了的五个点均在此三角形的内部,它们之中任一

点到三边的距离均大于零，所以一定可以找到一个三边与此三角形的三边分别平行而面积小于 1 的正三角形，使得这五个点仍旧在这三角形的内部，记这个三角形为 $\triangle ABC$.

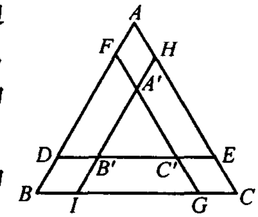


图 8.15

如图 8.15，其中 AD、AE、BF、BG、CH、CI 均为 $\triangle ABC$ 的边长的$\frac{4}{5}$，于是

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{4}{5})^2=0.64$$

又由 $S_{\triangle ABC}<1$，则

$$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BFG}=S_{\triangle CHI}<0.64$$

分以下几种情况讨论.

(i)这五个点至少有三个位于$\triangle ADE$、$\triangle BFG$、$\triangle CHI$ 中任何一个之内(包括边界)，则其他的点至多是两个，用满足命题的足够小的正三角形分别盖住即可，此时这三个正三角形的面积之和小于 0.64.

(ii)至多有两个点落在这三个三角形中任何一个之内.

注意到$\triangle ABC$ 被 DE、FG、IH 分成七个区域：$\triangle A'B'C'$ 及三个菱形和三个梯形，其中$\triangle A'B'C'$ 为此三个三角形所共有，三个梯形各为两个三角形所共有，而三个菱形各仅为一个三角形所包含.

如有一个点在$\triangle A'B'C'$ 中，则其余四个点在这七个区域中无论如何分布，这三个三角形总有一个至少包含三个点，这与假设矛盾，因此在$\triangle A'B'C'$ 中没有点.

若有一个点在某个梯形，如在 $B'C'G'I'$ 中，则在其余两个梯形中不能再有点，否则也必定导致这三个三角形会有一个至少包含三个点，这时，其余四点只能是在菱形 $BDB'I$ 及 $CEC'G$ 中各有一个，在另一个菱形 $AFA'H$ 中有两个，如图 8.16 所示.

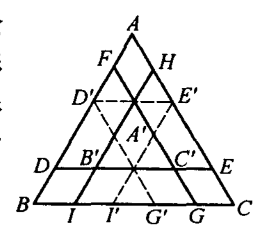


图 8.16

过 A' 作 $D'E'\parallel BC$ 交 AB 于 D'，交 AC 于 E'. 过 D'、E' 分别作 $D'G'\parallel AC$，$E'I'\parallel AB$ 交 BC 于 G'、I'.

显然 $D'G'$ 和 $I'E'$ 交 DE 的中点，由于$\triangle BD'G'$ 与$\triangle CE'I'$ 完全盖住梯形 $DECB$，所以这两个三角形至少有一个能盖住两个点，而$\triangle AD'E'$ 也盖住两个点，可以求得

$$S_{\triangle BD'G'}=S_{\triangle CE'I'}=0.36S_{\triangle ABC}<0.36$$

$$S_{\triangle AD'E'}=0.16S_{\triangle ABC}<0.16$$

由于$\triangle BD'G'$和$\triangle CE'I'$中的一个及$\triangle AD'E'$共盖住四个点,它们的面积之和小于0.52,于是第五个点用足够小的正三角形盖住即可.

最后一种可能就是三个梯形中也没有点,于是这五个点都在这三个菱形中,而且有两个菱形中各有两点,另一个菱形中只有一点,这时可用$\triangle AD'E'$及两个全等的三角形盖住,如图8.17所示.

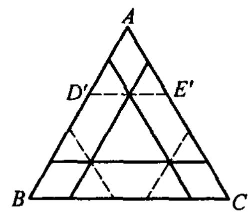


图8.17

它们的面积之和小于$3\times0.16=0.48<0.64$.

证法2 在正$\triangle ABC$中

$$AE:EF:FB=2:6:2, AD:DR:RC=2:6:2,$$
$$BG:GH:HC=2:6:2$$

(1)如图8.18,若三个小菱形I_1、I_2、I_3中,每个小菱形至多有一个点,则余下的部分中至少有两个点,且$\triangle AFR$、$\triangle BEH$、$\triangle CGD$三个三角形(面积均等于0.64)至少有一个三角形盖住三个点,这三个点不可能分别在这个三角形的三条边上,因此可以作面积小于0.64的三角形盖住三个点.

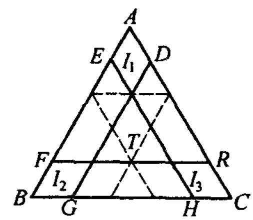


图8.18

设面积为S,则$S<0.64$,另外作两个小三角形分别盖住余下的两点,面积均等于$\frac{0.64-S}{2}$,这样所作的三个三角形盖住了五个点,且面积之和不超过0.64.

(2)至少有一个小菱形盖住两个或两个以上的点.

若盖住三个点以上,则命题显然成立;

若盖住两点,不妨设I_1盖住两点,而$\triangle AFR$盖住三个点,则命题同样成立;

若$\triangle AFR$也只盖住两个点,则等腰梯形$FBCR$盖住三个点,取FR中点T,如图8.18所示.这时可用一个面积为$(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$的三角形盖住菱形$I_1$中的两个点,用一个面积为$(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$的三角形盖住另外两个点,另一个面积为$\delta$的小三角形盖住另外一点,则

$$\frac{4}{25}+\frac{9}{25}+\delta<0.64$$

命题得证.

注[①]　这个命题还可以改进为:这三个三角形的面积之和不超过$\left(\frac{10}{13}\right)^2$,且它是这三个三角形之和的最小值,现证明如下.

如图 8.19,在正△ABC 中

$$AE:EF:FB=3:7:3, AD:DR:RC=3:7:3, BG:GH:HC=3:7:3$$

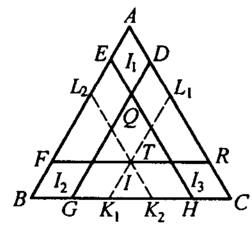


图 8.19

(i)若三个小菱形 I_1、I_2 和 I_3 中的每个至多包含有此五点中的一个,且余下部分中至少包含有两个点,并且△AFR、△BEH、△CGD 之中至少有一个盖住了三个点,这三个三角形的面积等于$\left(\frac{10}{13}\right)^2$,由题中条件可知,这三个点不可能分别在这个三角形的三条边上,因此可以作面积小于$\left(\frac{10}{13}\right)^2$的三角形盖住此三点,设这个三角形的面积为 S,另外,容易作出两个满足题设条件的小正三角形分别盖住余下的两个点,且其面积均小于或等于$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{10}{13}\right)^2-S\right]$,这样,所作的三个正三角形盖住了这五个点,且三个正三角形的面积之和不超过$\left(\frac{10}{13}\right)^2$.

(ii)若至少有一个小菱形盖住两个或两个以上的点,当盖住三个点以上时,则命题显然成立;当盖住两个点时,不妨设 I_1 盖住两点,如果△AFR 盖住三个点,这时命题同样成立.

如果△AFR 也只盖住了两个点,则等腰梯形 $FBCR$ 盖住其余三个点.这时容易看出,可用一个面积为 $S_1\left(S_1<\left(\frac{6}{13}\right)^2\right)$的正三角形盖住菱形 I_1 中的两个点.

如图 8.19,取 FR 的中点 T,并过 T 作 AB 的平行线 K_1L_1 及 AC 的平行线 K_2L_2,则△K_1L_1C 和△K_2L_2B 之中,必有一个盖住等腰梯形 $FBCR$ 中的两个或两个以上的点,这两个三角形的面积均等于$\left(\frac{8}{13}\right)^2$,于是可用一个面积为 $S_2\left(S_2<\left(\frac{8}{13}\right)^2\right)$的三角形盖住这两个(或两个以上)点,而余下的一点(如果还有

① 吴振奎,等.世界数学奥林匹克解题大辞典——几何卷[M].石家庄:河北少年儿童出版社,2003:805-806.

的话)可用一个面积为$\left(\frac{6}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2-S_1-S_2$的小正三角形盖住,这三个正三角形面积之和小于或等于

$$S_1+S_2+\left[\left(\frac{6}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2-S_1-S_2\right]=\left(\frac{10}{13}\right)^2$$

不难发现,上述过程中所得到的数值$\left(\frac{10}{13}\right)^2$不可能再缩小.

这是因为,如果题中要求三个正三角形之和不超过 M,而 $M<\left(\frac{10}{13}\right)^2$,这时我们可以在正三角形中这样放置五个点:

其中两个点分别放在图 8.19 中的 Q、T 上,另外三个点分别放在非常靠近顶点 A、B、C 的位置上,这时盖住这五个点的三个三角形面积之和就将超过 M.

试题 B3　设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体,S_1、S_2、S_3、S_4 分别是以 A_1、A_2、A_3、A_4 为球心的球,它们两两相切.如果存在一点 Q,以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1、S_2、S_3、S_4 都相切,还可作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切.求证:这个四面体是正四面体.

证法 1　首先指出这样的事实:如果球心不在一条直线上的四个球面 σ、σ_1、σ_2、σ_3 两两相切,那么或者它们两两相外切,或者它们之中的三个球面两两相外切并且都在第四个球面之内与之相切.我们用反证法证明这一事实.假如不是这样,即其中某个球面,例如 σ,其内外都有球面与之相切.不妨设 σ_1 在内而 σ_2 或 σ_3 在外,那么 σ_1 与 σ_2 的切点及 σ_1 与 σ_3 的切点都重合于 σ_1 与 σ 的切点,因而四个球的球心在同一直线上,与所设矛盾.

约定把以 Q 为中心,r 为半径的那个球记为 S;把以同一点为中心,R 为半径的球记为 T;并将球面 S_1、S_2、S_3、S_4 的半径分别记为 r_1、r_2、r_3、r_4.由上面指出的事实易得知:或者 S_1、S_2、S_3、S_4 都与 S 相外切,或者它们都在 S 内与之相切.

考察 $A_1A_2A_3$ 所在的平面与球面 S_1、S_2、S_3、T 相截得的图形,如图 8.20(a)所示.

设 T 与棱 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 相切的切点分别为 B_1、B_2、B_3,则显然有

$$A_1B_2=A_1B_3,A_2B_3=A_2B_1,A_3B_1=A_3B_2$$

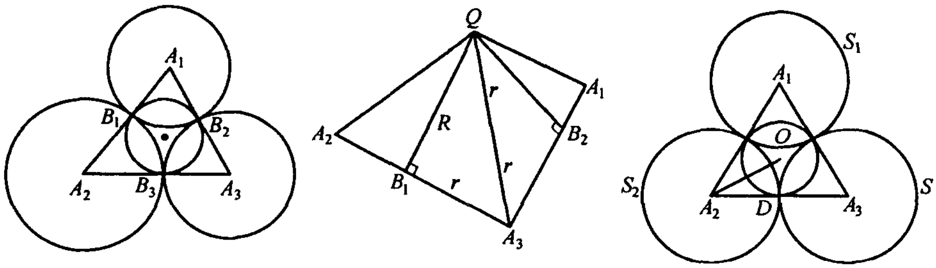
而球面 S_2 与 S_3,S_3 与 S_1,S_1 与 S_2 的切点 C_1、C_2、C_3 也有同样的性质,即

$$A_1C_2=A_1C_3,A_2C_3=A_2C_1,A_3C_1=A_3C_2$$

由此易知

$$C_1=B_1,C_2=B_2,C_3=B_3$$

以下分两种情形讨论.



(a) (b) (c)

图 8.20

情形 1 S_1、S_2、S_3、S_4 与 S 相切外. 因为

$$QB_1\perp A_2A_3, QB_2\perp A_3A_1, QB_3\perp A_1A_2$$

根据勾股定理可得(参看图 8.20(b))

$$(r+r_i)^2=R^2+r_i^2$$

$$r_i=\frac{R^2-r^2}{2r}, i=1,2,3$$

因而
$$A_1A_2=A_1A_3=A_2A_3=\frac{R^2-r^2}{r}$$

同理
$$A_1A_4=A_2A_4=A_3A_4=\frac{R^2-r^2}{r}$$

这证明了 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体.

情形 2 S_1、S_2、S_3、S_4 在 S 内与 S 相切. 对这情形, 用类似于情形 1 中的办法, 可以算出

$$(r-r_i)^2=R^2+r_i^2, r_i=\frac{r^2-R^2}{2r}, i=1,2,3,4$$

因而 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个各棱长均为 $\frac{r^2-R^2}{r}$ 的正四面体.

证法 2 先看以下引理.

引理 设有 $\triangle A_1A_2A_3$, S_1、S_2、S_3 分别是以 A_1、A_2、A_3 为圆心的圆, 它们两两相切. 如果存在一点 O, 以这点为圆心可作一个半径为 r 的圆与 S_1、S_2、S_3 都相切, 还可作一个半径为 R 的圆与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的各边都相切, 则 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

事实上, (1) 先设 S_1、S_2、S_3 两两外切.

(i) 若圆 $O(r)$ 与 S_1、S_2、S_3 均外切. 如图 8.20(c) 所示, 设圆 $O(R)$ 为

$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆,与 A_2A_3 切于 D.令圆 S_1、S_2、S_3 的半径分别为 r_1、r_2、r_3.若 $r(r+2r_2)>R^2$,则

$$A_2D=\sqrt{(r+r_2)^2-R^2}>r_2$$

从而 $A_3D<r_2$,推出 $r(r+2r_3)<R^2$;同理,由 $r(r+2r_3)<R^2$ 可推得 $r(r+2r_1)>R^2$,又可推得 $r(r+2r_2)<R^2$,引出矛盾.同理设 $r(r+2r_2)<R^2$,也推出矛盾.所以 $r(r+2r_2)=R^2$,同理

$$r(r+2r_1)=r(r+2r_2)=r(r+2r_3)=R^2$$

推得 $r_1=r_2=r_3$,从而 $a=b=c$,a、b、c 为$\triangle A_1A_2A_3$ 的三边,$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

(ii)若圆 $O(r)$ 与 S_1、S_2、S_3 均内切,类似于(i),只须把 $r+2r_1$, $r+2r_2$, $r+2r_3$相应地改为 $r-2r_1$, $r-2r_2$, $r-2r_3$ 即可,仍可证得$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形(不考虑圆 $O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的旁切圆的情形).

(2)再设 S_1、S_2、S_3 中有一对外切,两对内切,则易证得点 O 必在$\triangle A_1A_2A_3$

 外,不可能作圆 $O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆.易知 S_1、S_2、S_3 不可能再有其他情形,证毕.

原题证明:

(1)先设 S_1、S_2、S_3、S_4 两两外切.用完全类似于引理证明中的(1)的方法,可推得:对于$\triangle A_1A_2A_3$,有 $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_1$,$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形;…;$\triangle A_2A_3A_4$ 为正三角形(亦即应用“圆幂定理”的推广“球幂定理”).从而得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体.

(2)再设 S_1、S_2、S_3、S_4 不两两外切,用类似于引理证明中的(2)的方法,也易知不可能作球 $O(R)$与六条棱 $A_1A_2,\cdots,A_3A_4$ 均相切.证毕.

试题 C1 在平面直角坐标系中给定一个 100 边形 P,满足(i)P 的顶点坐标都是整数;(ii)P 的边都与坐标轴平行;(iii)P 的边长都是奇数.
试证 P 的面积是奇数.

解 设多边形的顶点为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,100)$,解析几何中有一个求多边形面积的公式为

$$\text{面积 } S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100}\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix}\quad(x_{101}=x_1,y_{101}=y_1)$$

不妨假定第一条边 P_1P_2 是平行于 y 轴的,则

$$x_{2i-1}=x_{2i},y_{2i}=x_{2i+1}$$

$$x_{2i+1}-x_{2i}\equiv 1,\ y_{2i+2}-y_{2i+1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\ i=1,2,\cdots,50$$

所以

$$S=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+\cdots-x_2y_1-x_3y_2-\cdots-x_1y_{100})=$$
$$(x_1y_2+x_3y_4+\cdots+x_{49}y_{100}-x_3y_2-x_5y_4-\cdots-x_1y_{100})=$$
$$(x_1-x_3)y_2+(x_3-x_5)y_4+\cdots+(x_{99}-x_1)y_{100}\equiv$$
$$y_2+y_4+\cdots+y_{100}\equiv 50y_2+25\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$$

试题 C2　设 S 是直角坐标平面上关于两坐标轴都对称的任意凸图形.在 S 中作一个四边都平行于坐标轴的矩形 A,使其面积最大.把矩形 A 按相似比 $1:\lambda$ 放大为矩形 A',使 A' 完全盖住 S.试求对任意平面凸图形 S 都适用的最小的 λ.(**注**　若平面图形中任意两点所连线段包含在这个图形之中,则称这个图形为凸图形).

解法 1　如图 8.21(a),设点 $P(a,0)$、$Q(0,b)$分别为凸形 S 的边界与 x、y 轴正向的交点.

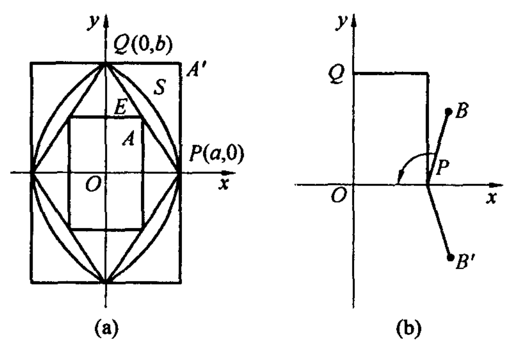


图 8.21

S 一定被矩形 $A'=\{(x,y)\mid |x|\leqslant a,|y|\leqslant b\}$覆盖,事实上,若点 $B\in$凸形 S,不妨假定 B 在第一象限,若 $B\notin$矩形 A',如图 8.21(b)所示,则有

$$\angle BPO>90^\circ\quad 或\quad \angle BQO>90^\circ$$

不妨设前者成立.点 B 关于 x 轴的对称点 $B'\in S$,并且

$$\angle BPB'=2\angle BPO>180^\circ \qquad (*)$$

但凸形 S 的点应当在过点 A 的一条直线的同侧,因此($*$)不可能成立.这就说明凸形 S 的每一点 $B\in$矩形 A'.即矩形 A'覆盖 S.

联结 PQ,线段 PQ 的中点 E 为$(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$,$E$ 在凸形 S 中,从而矩形

$$A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant\frac{a}{2},|y|\leqslant\frac{b}{2}\}$$

在凸形 S 中,如图 8.21(a)所示.

A 与 A' 的相似比为 1:2,因此 $\lambda\leqslant 2$.

另一方面,考虑菱形

$$S_1=\{(x,y)\mid |\frac{x}{a}|+|\frac{y}{b}|\leqslant 1\}$$

S_1 是凸形,并且覆盖 S_1 的最小的、四边与坐标轴平行的矩形是上面所说的 A'.

由于 $xy=ab\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}$,在 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 时,xy 的最大值在 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{1}{2}$,即 $x=\frac{a}{2}$,$y=\frac{b}{2}$ 时达到,因此 S_1 中的四边与坐标轴平行的矩形以上面所说的 A 面积最大,从而 $\lambda\geqslant 2$,于是 $\lambda=2$.

解法 2 解本题之前,先证明一个命题.

命题 给定 Rt$\triangle ABC$,$\angle C=90°$.由 AB 上一点 P 向两直角边作垂线,设交点为 M、N.则当 P 为中点时,矩形 $CNPM$ 的面积最大.

事实上,设两直角边边长为 a、b,P 到它们的距离为 x、y,则有 $\frac{x}{b}+\frac{x}{a}=1$.故

$$\frac{x}{b}\cdot\frac{y}{a}\leqslant\left(\frac{\frac{x}{b}+\frac{y}{a}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

即 $xy\leqslant\frac{ab}{4}$,当 $\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$ 时取等号.这时 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{1}{2}$,即 P 为中点.

下面解本题.由对称性,只考虑 S 在第一象限中的部分.设 S 与 x 轴、y 轴分别交于 $A(a,0)$、$B(0,b)$,如图 8.22 所示,设矩形 A 在第一象限部分为矩形 $OMPN$,其中 P 的坐标为 (x,y).则有

$$x\geqslant\frac{a}{2},y\geqslant\frac{b}{2}$$

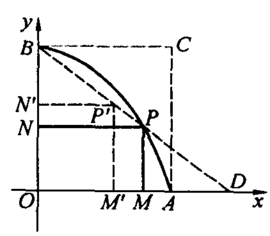


图 8.22

事实上,若 $y<\frac{b}{2}$,联结 BP 并延长交 x 轴于 D.设 N' 坐标为 $\left(0,\frac{b}{2}\right)$,$P'$ 为 BD 中点,其在 x、y 轴上的投影分别为 M'、N',则由上面的命题知矩形 $OM'P'N'$ 的面积大于矩形 $OMPN$ 的面积.而 P' 在 BP 上,又 S 是凸

的，所以矩形 $OM'P'N'$ 在 S 的第一象限部分内，这就得出存在一矩形 A_1 在 S 内使 A_1 的面积为矩形 $OM'P'N'$ 的面积的四倍，于是 A_1 的面积大于 A 的面积，与题设矛盾.

因此有 $y \geqslant \frac{b}{2}$. 同理可证 $x \geqslant \frac{a}{2}$.

将矩形 $OMPN$ 按 1:2 的比例扩大为矩形 A'，A' 必覆盖 S，所以应有 $\lambda \leqslant 2$，但当 S 为一个菱形时，易证应有 $\lambda \geqslant 2$. 因此 $\lambda = 2$.

第 1 节　三角形的高线垂足三角形问题

设 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高线，以三个垂足 D、E、F 为顶点的 $\triangle DEF$ 称为 $\triangle ABC$ 的高线垂足三角形.

1. 高线垂足三角形的性质

性质 1　凡不是直角三角形的三角形都有它的垂足三角形. 垂足三角形的形状及大小由原三角形完全确定.

性质 2　设 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，且 D、E、F 分别在边 BC、AC、BC 所在直线上，则

(1) $\triangle DEF$ 的外接圆就是 $\triangle ABC$ 的九点圆. 且其外心为 $\triangle ABC$ 的外心与垂心（或钝角 $\triangle ABC$ 的钝角顶点）连线的中点，半径 R' 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径 R 的 $\frac{1}{2}$，即 $R' = \frac{1}{2}R$.

(2) $\triangle DEF$ 的内心，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，为 $\triangle ABC$ 的垂心；当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，为 $\triangle ABC$ 的钝角顶点.

证明　仅对锐角 $\triangle ABC$ 给出证明（因当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，只须将垂心 H 与钝角顶点字母互换即可，这可见图 8.23(b)）

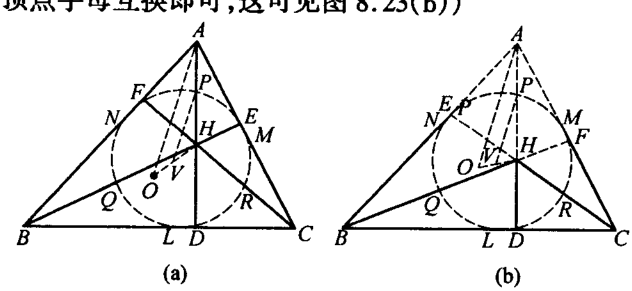


图 8.23

(1)设△ABC的外心为O,垂心H,如图8.23(a)所示.取OH的中点V,联结AO,又设L、M、N、P、Q、R分别为BC、CA、AB、AH、BH、CH的中点,联结VP.

以V为圆心,$\frac{1}{2}AO$为半径作圆V.由$VP \underline{\parallel} \frac{1}{2}OA$(可由延长$AO$交△$ABC$的外接圆于$K$,得$HBKC$为平行四边形,此时$L$为$KH$的中点,则$OL$为△$AKH$的中位线即得),知$OL \underline{\parallel} PH$.又$OV=VH$,知△$OLV \cong$△$HPV$,从而$VL=VP=\frac{1}{2}OA$,且$L$、$V$、$P$共线,故$L$在圆$V$上,同理,$M$、$N$在圆$V$上.

由L、V、P共线知LP为圆V的一条直径.

又$\angle LDP=90^\circ$,$\angle MEQ=90^\circ$,$\angle NFR=90^\circ$,知D、E、F在圆V上.

故D、E、F、L、M、N、P、Q、R九点共圆,显然此圆为△DEF的外接圆.

由$VP=\frac{1}{2}OA$即知$R'=\frac{1}{2}R$.

(2)在锐角△ABC中,设H为其垂心,由B、C、E、F,B、D、H、F,D、C、E、H分别四点共圆,则知

$$\angle EBF=\angle ECF,\angle HBF=\angle HDF,\angle HDE=\angle HCE$$

故
$$\angle HDE=\angle HDF$$

即AD平分$\angle EDF$.同理,BE平分$\angle DEF$,CF平分$\angle EFD$.故知H为△DEF的内心.

性质3 设△DEF是锐角△ABC的垂足三角形,且D、E、F分别在边BC、AC、AB上.设P、R、r、S分别为△ABC的半周长、外接圆半径、内切圆半径及面积;P'、r'、S'分别表示△DEF的半周长、内切圆半径及面积,则

(1)$\angle EDF=180^\circ-2\angle A$,$\angle DEF=180^\circ-2\angle B$,$\angle EFD=180^\circ-2\angle C$.

(2)△DEF是所有内接于锐角△ABC的三角形中的周长最小者.

(3)$P'=\frac{r}{R}P$.

(4)$S'=2S\cos A\cos B\cos C$.

(5)$r'=2R\cos A\cos B\cos C$,且$r'\leqslant\frac{r^2}{R}$.

证明 如图8.24,令$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$.

(1)由A、B、D、E,A、C、D、F分别四点共圆,知$\angle EDC=\angle A=\angle BDF$,故

$$\angle EDF=180^\circ-\angle EDC-\angle BDF=180^\circ-2\angle A$$

同理,可证其他两式.

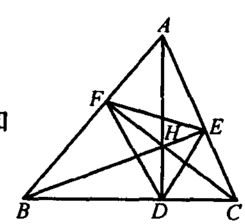


图8.24

(2)可参见第 3 章第 1 节反射变换中的例子.

(3)由 B、C、E、F 四点共圆,且该圆的直径为 $BC = a$,$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$,则

$$FE = a \cdot \frac{AE}{AB} = a, \sin \angle FBE = a\cos A$$

同理 $$FD = AC\cos B = b\cos B, ED = AB\cos C = c\cos C$$

从而 $$FE + FD + ED = a\cos A + b\cos B + c\cos C =$$

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$\frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2}{2abc} =$$

$$\frac{16s^2}{2abc} = \frac{16s^2}{8sR}(\text{可证 } 4SR = abc) =$$

$$\frac{2S}{R} = \frac{(a+b+c)r}{R}$$

故 $$p' = \frac{r}{R}p$$

(4)可求得

$$AF = b\cos A, AE = c\cos A, BF = a\cos B$$

$$BD = c\cos B, CD = b\cos C, CE = a\cos C$$

令$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle DCE$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3,则

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}AF \cdot AE\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A} = \frac{bc\cos^2 A}{bc} = \cos^2 A$$

同理 $$\frac{S_2}{S} = \cos^2 B, \frac{S_3}{S} = \cos^2 C$$

则 $$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

从而 $$\frac{S'}{S} = \frac{S - (S_1 + S_2 + S_3)}{S} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) =$$

$$2\cos A\cos B\cos C$$

故 $$S' = 2S\cos A\cos B\cos C$$

(5)由 $S' = 2S\cos A\cos B\cos C$ 知

$$r'p' = 2rp\cos A\cos B\cos C$$

又由 $p' = \frac{r}{R}p$ 知

$$r' = 2R\cos A\cos B\cos C$$

又
$$\cos A\cos B\cos C=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$$
且
$$p^2\leqslant 4Rr+4R^2+3r^2\quad(\text{格瑞特森不等式})$$
故
$$r'=\frac{p^2-4R^2-4Rr-r^2}{2R}\leqslant\frac{4R^2+4Rr+3r^2-4R^2-4Rr-r^2}{2R}=\frac{r^2}{R}$$

注 由性质 3 可直接证明 $R'=\frac{1}{2}R$. 事实上,可设 $FE=a'$, $ED=b'$, $DF=c'$.

因 $\frac{S'}{S}=\frac{a'b'c'}{4R'}\Big/\frac{abc}{4R}$,又由性质 3(3)的证明中知
$$a'b'c'=abc\cos A\cos B\cos C$$
则
$$\frac{S'}{S}=\frac{R}{R'}\cos A\cos B\cos C$$
又由性质 3(4)知
$$\frac{S'}{S}=2\cos A\cos B\cos C$$

 故 $\frac{R}{R'}=2$,即 $R'=\frac{1}{2}R$.

2. 垂心组的性质

设任意$\triangle ABC$ 的三条高线相交于点 H,则其垂足三角形的三个顶点 D、E、F 与点 H 构成一垂心组(在四点中,任一点是另三点为顶点的三角形的垂心,称这四点为一垂心组).

性质 4 垂心组的四点为三角形顶点的四个三角形有同一九点圆.

事实上,九点圆是垂足三角形的外接圆,而垂心组所构成的四个三角形有同一垂足三角形,所以它们有同一九点圆.

性质 5 垂心组的四点为三角形顶点的四个三角形的外心,另成一垂心组.且此垂心组各点与已知垂心组各点关于九点圆圆心 V 对称.

事实上,设 D、E、F、H 为已知垂心组,由 D 为$\triangle HEF$ 的垂心,知$\triangle HEF$ 的外心 O_D 与 D 关于 V 对称.

同理$\triangle HFD$、$\triangle HDE$、$\triangle DEF$ 的外心 O_E、O_F、O_H 与 E、F、H 关于 V 对称.

性质 6 三角形的垂心组与其外心的垂心组有同一九点圆.

性质 7 垂心组的四点为顶点的四个三角形的重心另成一垂心组,此二组之形相位似.

事实上,设 A、B、C、H 为已知垂心组,它的九点圆为圆 V,$\triangle ABC$、$\triangle HBC$、$\triangle HCA$、$\triangle HAB$ 的垂心分别为 G_H、G_A、G_B、G_C.

可推知 $HV:VG_H=3:1$，$AV:VG_A=BV:VG_B=CV:VG_C=3:1$，则 H、A、B、C 与 G_H、G_A、G_B、G_C 组成的图形相位似，且位似比 $VH:VG_H=-(3:1)$.

3. 高线垂足三角形序列的性质①

由于非直角三角形的垂足三角形被已知非直角三角形完全确定，这样可得到一系列由原三角形完全确定的垂足三角形. 如图 8.25 所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形；$\triangle A_2B_2C_2$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂足三角形；… $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 是 $\triangle A_nB_nC_n$ 的垂足三角形；…. 我们称 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，…，$\triangle A_nB_nC_n$，…是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形序列，记 $\triangle ABC$ 的垂足三角形序列为 $\{\triangle A_nB_nC_n\}$.

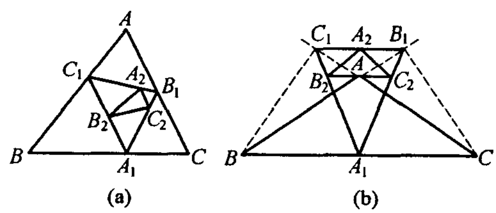


图 8.25

下面给出 $\triangle ABC$ 的垂足三角形序列 $\{\triangle A_nB_nC_n\}$ 的两条基本性质，并利用这些基本性质去解决有关实际问题.

性质 8　设 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径，$\triangle ABC$ 的垂足三角形序列 $\{\triangle A_nB_nC_n\}$ 的第 n 个垂足三角形 $\triangle A_nB_nC_n$ 的边长为 a_n、b_n、c_n，那么有

$$a_n=\frac{R}{2^{n-1}}=|\sin 2^nA|,\ b_n=\frac{R}{2^{n-1}}=|\sin 2^nB|,\ c_n=\frac{R}{2^{n-1}}=|\sin 2^nC|$$

证明　(i)当 $n=1$ 时，有 $\triangle ABC$ 为锐角三角形和钝角三角形两种情况. 先证前一种情况(如图 8.25(a)所示)：

$$a^2=AB_1^2+AC_1^2-2AB_1\cdot AC_1\cos A=(c\cos A)^2-2bc\cos^3A+(b\cos A)^2=$$
$$(b^2+c^2-2bc\cos A)\cos^2A=(a\cos A)^2$$

故
$$a_2=a\cos A=2R\sin A\cos A=R|\sin 2A|$$

同理
$$b_1=R|\sin 2B|,c_1=R|\sin 2C|$$

再证后一种情况(如图 8.25(b)所示，$\triangle ABC$ 是钝角三角形，$\angle A$ 是钝角).

$$a_1^2=AB_1^2+AC_1^2-2AB_1\cdot AC_1\cos A=(c\cos\angle B_1AB)^2+(b\cos\angle CAC_1)^2-$$
$$2bc\cos\angle B_1AB\cos\angle CAC_1\cos A$$

① 朱水源. 垂足三角形序列[J]. 中学数学教学, 1988(6):5-7.

由 $$\angle B_1AB=\angle CAC_1=\pi-A$$

知 $$a_1^2=(c^2+b^2+2bc\cos A)\cos^2 A=(a\cos A)^2$$

故 $$a_1=a|\cos A|=R|\sin 2A|$$

同理 $$b_1=R|\sin 2B|,c_1=R|\sin 2C|$$

因此,当 $n=1$ 时,命题成立.

(ii)假设当 $n=k$ 时,命题成立.

即以 a_k、b_k、c_k 记$\triangle ABC$ 的垂足三角形序列$\{\triangle A_nB_nC_n\}$的第 k 个三角形的边长,假设有

$$a_k=\frac{R}{2^{k-1}}|\sin 2^kA|,b_k=\frac{R}{2^{k-1}}|\sin 2^kB|,c_k=\frac{R}{2^{k-1}}|\sin 2^kC|$$

那么由余弦定理有

$$a_{k+1}^2=A_kB_{k+1}^2+A_kC_{k+1}^2-2A_kB_{k+1}\cdot A_kC_{k+1}\cos\angle B_{k+1}A_kC_{k+1}=$$
$$a_k^2\cos^2\angle B_{k+1}A_kC_{k+1}$$

则 $$a_{k+1}=a_k|\cos\angle B_{k+1}A_kC_{k+1}|=a_k\left|\frac{b_k^2+c_k^2-a_k^2}{2b_kc_k}\right|=$$
$$\frac{R}{2^k}|\sin 2^kA|\left|\frac{\sin^2 2^kB+\sin^2 2^kC-\sin^2 2^kA}{\sin 2^kB\sin 2^kC}\right|$$

由 $$|\sin^2 2^kB+\sin^2 2^kC-\sin^2 2^kA|=|1-\frac{1}{2}(\cos 2^{k+1}B+\cos 2^{k+1}C)-\sin^2 2^kA|=$$
$$|\cos^2 2^kA-\cos 2^k(B+C)\cos 2^k(B-C)|=$$
$$|\cos 2^kA(\cos 2^kA-\cos 2^k(B-C))|=$$
$$2|\cos 2^kA\sin 2^kB\sin 2^kC|$$

有 $$a_{k+1}=\frac{R}{2^k}|2\sin 2^kA|^2|\cos 2^kA|=\frac{R}{2^{(k+1)-1}}|\sin 2^{k+1}A|$$

同理 $$b_{k+1}=\frac{R}{2^{(k+1)-1}}|\sin 2^{k+1}B|$$

$$c_{k+1}=\frac{R}{2^{(k+1)-1}}|\sin 2^{k+1}C|$$

故当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

依数学归纳法原理,命题对一切自然数 n 都成立.结论证毕.

性质 9 设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,其垂角三角形序列$\{A_nB_nC_n\}$的第 n 个三角形的面积为 Δn,那么有

$$\Delta n=\frac{R^2}{2^{2n-1}}|\sin 2^nA\sin 2^nB\sin 2^nC|$$

证明　不妨设

$$a_n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nA,\ b_n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nB,\ c_n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nC$$

$(a_n=-\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nA,\ b^n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nB,\ c^n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nC;\ a_n=-\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nA,$ $b^n=-\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nB,\ c^n=\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nC\cdots$等情况,同理可以证明),并记

$$\rho_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n)$$

那么有

$$\rho_n=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nA+\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nB+\frac{R}{2^{n-1}}\sin 2^nC\right)=$$
$$\frac{R}{2^{n-1}}[\sin 2^{n-1}(A+B)\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C]=$$
$$\frac{R}{2^{n-1}}[\sin 2^{n-1}(\pi-C)\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C]$$

(i)当 $n=1$ 时.

$$\sin 2^{n-1}(\pi-C)\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C=$$
$$\sin C\cos(A-B)+\sin C\cos C=$$
$$\sin C[\cos(A-B)+\cos C]=$$
$$2\sin C\cos\frac{1}{2}(A-B+C)\cos\frac{1}{2}(A-B-C)=$$
$$2\sin C\cos(\frac{1}{2}\pi-B)\cos(\frac{1}{2}\pi-A)=$$
$$2\sin A\sin B\sin C$$

(ii)当 $n\geqslant 2$ 时.

$$\sin 2^{n-1}(\pi-C)\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C=$$
$$-\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C=$$
$$\sin 2^{n-1}C[-\cos 2^{n-1}(A-B)+\cos 2^{n-1}C=$$
$$-\sin 2^{n-1}C\sin 2^{n-2}(A-B+C)\sin 2^{n-1}(A-B-C)=$$
$$2\sin 2^{n-2}(\pi-2A)\sin 2^{n-2}(\pi-2B)\sin 2^{n-1}C=$$
$$2\sin 2^{n-1}A\sin 2^{n-1}B\sin 2^{n-1}C$$

综合(i)、(ii)得

$$\sin 2^{n-1}(\pi-C)\cos 2^{n-1}(A-B)+\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}C=$$
$$2\sin 2^{n-1}A\sin 2^{n-1}B\sin 2^{n-1}C$$

故
$$\rho_n=\frac{R}{2^{n-2}}\sin 2^{n-1}A\sin 2^{n-1}B\sin 2^{n-1}C$$
$$\rho_n-a_n=\frac{R}{2^{n-2}}\sin 2^{n-1}A\cos 2^{n-1}B\cos 2^{n-1}C$$
同理
$$\rho_n-b_n=\frac{R}{2^{n-2}}\sin 2^{n-1}B\cos 2^{n-1}A\cos 2^{n-1}C$$
$$\rho_n-c_n=\frac{R}{2^{n-2}}\sin 2^{n-1}C\cos 2^{n-1}A\cos 2^{n-1}B$$
故
$$\Delta_n=\sqrt{\rho_n(\rho_n-a_n)(\rho_n-b_n)(\rho_n-c_n)}=$$
$$\frac{R^2}{2^{2n-1}}|\sin 2^nA\sin 2^nB\sin 2^nC|$$

例1 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的外接圆半径分别是 R、r. 求证：$R=2r$.

(1981 年太原市竞赛题)

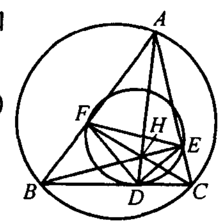


图 8.26

证明 如图 8.26，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C$$
由性质 3(4)有
$$S_{\triangle DEF}=2S_{\triangle ABC}\cos A\cos B\cos C=$$
$$4R^2\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C=$$
$$\frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$$
由 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$ 知 $\frac{EF}{BC}=\cos A$，因
$$EF=BC\cos A=2R\sin A\cos A=R\sin 2A$$
同理
$$FD=R\sin 2B,DE=R\sin 2C$$
又 r 是 $\triangle DEF$ 外接圆的半径，则
$$r=\frac{DE\cdot EF\cdot FD}{4S_{\triangle DEF}}=\frac{R^3\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{2R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C}=\frac{R}{2}$$
故
$$R=2r$$

例2 锐角 $\triangle ABC$ 三边上的高分别是 AD、BE、CF，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R. 求证：$\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle DEF$ 的周长与 R 乘积的一半.

(1979 年重庆市竞赛题)

证明 参见图 8.26，因 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

由性质 3(2),有

$$L_{\triangle DEF}=4R\sin A\sin B\sin C$$

$$\frac{1}{2}RL_{\triangle DEF}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

故
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}RL_{\triangle DEF}$$

例 3　已知 D、E、F 为锐角$\triangle ABC$ 的内切圆切点,设 r、R 分别为圆 DEF 与圆 ABC 的半径,$\triangle DEF$ 的垂足三角形为$\triangle KMN$.求证:$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle ABC}=r^2:4R^2$.

(第 21 届 IMO 加拿大训练题)

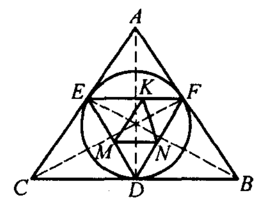


图 8.27

证明　如图 8.27,由性质 3(4)或性质 9,有

$$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle DEF}=2\cos\angle EDF\cos\angle DFE\cos\angle FED$$

又$\triangle DEF$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆切点三角形,I 为$\triangle ABC$ 的内心,则

$$\angle EID=180^\circ-\angle C$$

又由 $EI=ID$,知

$$\angle EDI=\angle DEI=\frac{\angle C}{2}$$

同理
$$\angle FDI=\angle DFI=\frac{\angle B}{2},\angle FEI=\angle EFI=\frac{\angle A}{2}$$

则
$$\angle EDF=\angle EDI+\angle FDI=\frac{\angle B+\angle C}{2}=90^\circ-\frac{\angle A}{2}$$

同理
$$\angle DFE=90^\circ-\frac{\angle C}{2},\angle FED=90^\circ-\frac{\angle B}{2}$$

从而
$$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle DEF}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

又
$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{2R}$$

$$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=r:2R$$

故
$$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle ABC}=r^2:4R^2$$

例 4　锐角$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的等分线与三角形外接圆交于另一点 A_1,点 B_1、C_1 与此类似,直线 AA_1 与$\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线相交于 A_0,点 B_0、C_0 与此类似,求证:

(1)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的 2 倍.

(2)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是$\triangle ABC$ 面积的 4 倍.

(1989 年第 30 届 IMO 试题)

证明 如图 8.28,有

(1) $$\angle BIA_1 = \angle ABI + \angle BAI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

$$\angle A_1BI = \angle CBI + \angle CBA_1 = \angle CBI + \angle CAA_1 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

则$\angle BIA_1 = \angle A_1BI$,即 $A_1I = A_1B$.又 BB_0、BA_0 分别是$\angle ABC$ 的内、外角平分线,则 $BB_0 \perp BA_0$.即

$$\angle A_1BA_0 = 90^\circ - \angle A_1BI = 90^\circ - \angle BIA_1 = \angle BA_0A_1$$

从而 $$A_1A_0 = A_1B = A_1I$$

于是有 $$S_{\triangle A_0BI} = 2S_{\triangle A_1BI}$$

类似地,还有五个这样的等式,将这六个等式相加得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$$

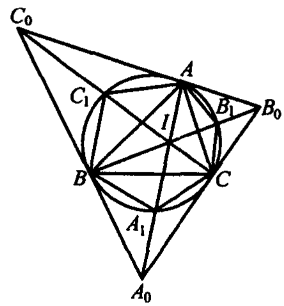


图 8.28

(2)易证 AA_0、BB_0、CC_0 是$\triangle A_0B_0C_0$ 的三条高,则$\triangle ABC$ 是$\triangle A_0B_0C_0$ 的垂足三角形.因

$$\angle A_0 + \angle B_0 = 180^\circ - \angle C_0$$

则 $$\cos A_0\cos B_0\cos C_0 = \frac{1}{2}[\cos(A_0+B_0) + \cos(A_0-B_0)]\cos C_0 \leqslant$$

$$\frac{1}{2}(-\cos C_0 + 1)\cos C_0 \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(1-\cos C_0)+\cos C_0}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}$$

由性质 3(4)有

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle A_0B_0C_0}\cos A_0\cos B_0\cos C_0 \leqslant 2S_{\triangle A_0B_0C_0}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}S_{\triangle A_0B_0C_0}$$

故 $$S_{\triangle A_0B_0C_0} \geqslant 4S_{\triangle ABC}$$

例 5① 设锐角$\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD、BE、CF,垂心为 H.记 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,$EF = a'$,$FD = b'$,$DE = c'$,再设$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的外接圆外径与内切圆半径分别为 R、r 与 R'、r',则下面关系式成立.

① 苏化明.从一道 IMO 试题谈起[J].中学数学,1990(9):46-48.

(1) $r' \leqslant \frac{1}{2} r$.

(2) $a' + b' + c' \leqslant \frac{1}{2}(a + b + c)$.

(3) $a'b' + b'c' + c'a' \leqslant \frac{1}{4}(ab + bc + ca)$.

(4) $a'^2 + b'^2 + c'^2 \leqslant \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

(5) $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \leqslant \frac{3}{2}$.

(6) $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} \geqslant 6$.

(7) $\frac{a'b'}{ab} + \frac{b'c'}{bc} + \frac{c'a'}{ca} \leqslant \frac{3}{4}$.

(8) $\frac{ab}{a'b'} + \frac{bc}{b'c'} + \frac{ca}{c'a'} \geqslant 12$.

(9) $\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{c'^2}{c^2} \geqslant \frac{3}{4}$.

(10) $\frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2} \geqslant 12$.

(11) $a'b'c' \leqslant \frac{1}{8} abc$.

以上各不等式中的等号当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

证明　注意到性质 3(4),有

$$S_{\triangle DEF} = 2S_{\triangle ABC}\cos A\cos B\cos C \quad ①$$

(1)令 $p' = \frac{1}{2}(a' + b' + c')$,则

$$p' = \frac{1}{2}R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 2R\sin A\sin B\sin C$$

在下面的讨论中,记 $S_{\triangle DEF} = S'$, $S_{\triangle ABC} = S$.

由三角形内切圆半径公式知

$$r' = \frac{S'}{p'} = \frac{2S\cos A\cos B\cos C}{2R\sin A\sin B\sin C} = 2R\cos A\cos B\cos C =$$

$$\frac{r}{2}\cdot\frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

由$\triangle ABC$ 中熟知的不等式

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad ②$$

及

$$\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}(\triangle ABC\text{ 为锐角三角形}) \quad ③$$

知
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{9}\sin A\sin B\sin C$$

及
$$\frac{\sqrt{3}}{9}\sin A\sin B\sin C\geqslant\cos A\cos B\cos C$$

故有

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant\cos A\cos B\cos C \quad ④$$

所以 $r'\leqslant\frac{1}{2}r$.

(2)因为

$$a'+b'+c'=4R\sin A\sin B\sin C=4(a+b+c)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

而

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8} \quad ⑤$$

所以
$$a'+b'+c'\leqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

(3)在锐角$\triangle ABC$中,不妨设$\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$,则

$$\sin A\sin B\geqslant\sin C\sin A\geqslant\sin B\sin C$$
$$\cos A\cos B\leqslant\cos C\cos A\leqslant\cos B\cos C$$

由切比雪夫不等式(或排序原理)有

$$\sin 2A\sin 2B+\sin 2B\sin 2C+\sin 2C\sin 2A=$$
$$4(\sin A\sin B\cos A\cos B+\sin B\sin C\cos B\cos C+\sin C\sin A\cos C\cos A)\leqslant$$
$$\frac{4}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

又

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2=$$
$$\frac{1}{3}(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2\leqslant\frac{1}{3}(1+4\cdot\frac{1}{8})^2=\frac{3}{4} \quad ⑥$$

所以
$$\sin 2A\sin 2B+\sin 2B\sin 2C+\sin 2C\sin 2A\leqslant$$
$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

上式两边同乘以 R^2,即得

$$a'b'+b'c'+c'a'\leqslant\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$$

(4)由前面已证的结果知,对锐角$\triangle A_1B_1C_1$,成立不等式

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}\geqslant\cos A_1\cos B_1\cos C_1 \qquad ④'$$

但当$\triangle A_1B_1C_1$为直角三角形或钝角三角形时

$$\cos A_1\cos B_1\cos C_1\leqslant 0$$

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}>0$$

故④′对任意$\triangle A_1B_1C_1$成立.

因为$0<\angle A、\angle B、\angle C<\frac{\pi}{2}$,所以$0<\pi-2\angle A,\pi-2\angle B,\pi-2\angle C<\pi$,而且

$$\pi-2\angle A+\pi-2\angle B+\pi-2\angle C=\pi$$

故$\pi-2\angle A,\pi-2\angle B,\pi-2\angle C$可作为一三角形的三个内角,不妨令$\pi-2\angle A=\angle A_1,\pi-2\angle B=\angle B_1,\pi-2\angle C=\angle C_1$.于是由④′,有

$$\cos A\cos B\cos C\geqslant-\cos 2A\cos 2B\cos 2C \qquad ⑦$$

或 $$2+2\cos A\cos B\cos C\geqslant 2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$$

即 $$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\geqslant\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C$$

上式两边同乘以R^2,即得

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\geqslant a'^2+b'^2+c'^2$$

(此即不等式(4))

(5)因为

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=\cos A+\cos B+\cos C$$

而

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2} \qquad ⑧$$

所以 $$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\leqslant\frac{3}{2}$$

(6)因为

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geqslant 3(\cos A\cos B\cos C)^{-1/3}$$

而

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{3} \quad ⑨$$

所以
$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\geqslant 6$$

(7)因为
$$\frac{a'b'}{ab}+\frac{b'c'}{bc}+\frac{c'a'}{ca}=\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$

而 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leqslant\frac{3}{4}$

所以
$$\frac{a'b'}{ab}+\frac{b'c'}{bc}+\frac{c'a'}{ca}\leqslant\frac{3}{4}$$

(8)因为
$$\frac{ab}{a'b'}+\frac{bc}{b'c'}+\frac{ca}{c'a'}=\frac{1}{\cos A\cos B}+\frac{1}{\cos B\cos C}+\frac{1}{\cos C\cos A}\geqslant 3(\cos A\cos B\cos C)^{-2/3}$$

而
$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$$

所以
$$\frac{ab}{a'b'}+\frac{bc}{b'c'}+\frac{ca}{c'a'}\geqslant 12$$

(9)因为
$$\cos^2A\cos^2B\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C\geqslant 1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

所以
$$\frac{a'^2}{a^2}+\frac{b'^2}{b^2}+\frac{c'^2}{c^2}\geqslant\frac{3}{4}$$

(10)由不等式
$$\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\right)^2\leqslant 3\left(\frac{a^2}{a'^2}+\frac{b^2}{b'^2}+\frac{c^2}{c'^2}\right)$$

及不等式(6),即得
$$\frac{a^2}{a'^2}+\frac{b^2}{b'^2}+\frac{c^2}{c'^2}\geqslant 12$$

(11)由不等式(5)及算术－几何平均不等式,得
$$\frac{3}{2}\geqslant\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a'b'c'}{abc}}$$

从而有
$$a'b'c'\leqslant\frac{1}{8}abc$$

不等式(10)及(11)也可以直接证明,也可以由不等式(11)及算术－几何平均不等式得到(6)、(8)、(10),它们的证明我们留给读者去完成.

由于不等式②、③、④、⑤、④′、⑦、⑧、⑨中的等号当且仅当△*ABC* 为正三角形时成立，所以不等式(1) ~ (11)中的等号均当且仅当△*ABC* 为正三角形时成立.

第 2 节　图形覆盖问题

若线段 l_1 上任一点都在线段 l_2 上，我们称线段 l_2 覆盖了线段 l_1；若△*ABC* 内(包括边界)任一点都在圆 *O* 内，我们称圆 *O* 覆盖了△*ABC*，…….诸如此类的两个图形 *A*、*B*，若 $A\subset B$，则称 *B* 覆盖 *A*.

一般来说，对于平面点集 *N*、*M*、*M′*，若任一点元 $a\in N$，有 $a\in M$，则称集合 *M* 覆盖(包含)集合 *N*，若 *M* 经过一适当的运动(平移、旋转、反射等不改变图形的形状、大小)变为 *M′*，有 $a\in M'$，则集合能覆盖集合 *N*.

覆盖是一类十分有趣的几何问题.

在这里，我们仅讨论处理覆盖的几个常用方法和几类特殊覆盖问题.

一、处理覆盖问题的常用方法

1.涂色法

例 1　将 8 × 8 的国际象棋盘剪去左上角与右下角的两个小正方格.证明：剩下的图形不能用 31 个 2 × 1 的长方形覆盖.

证明　如图 8.29，把缺两角的棋盘上的方格涂上黑白两种颜色，同一种颜色的方格决不相邻，因此，每一个 2 × 1 的长方形一定覆盖住一个黑格和一个白格，31 个这样的长方形将盖住 31 个黑格与 31 个白格，但图中剪去的两个方格都是白的，因此，黑格有 32 个，31 个长方形不能将这个剪残了的棋盘完全盖住.

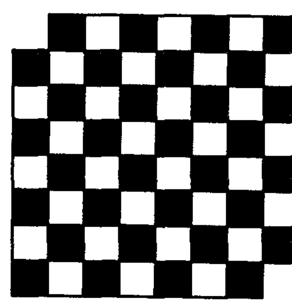
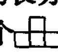
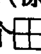


图 8.29

类似于上例，还可解答如下问题：

(1)8 × 8 的横盘剪去左上角的一个方格.证明剩下的棋盘不能用 21 个 3 × 1 的长方形覆盖.(涂三种颜色来证)

(2)8 × 8 的棋盘能否用 15 个形和 1 个形盖住？(涂两色来证)

以上覆盖问题之所以可用涂色法解答，是因为覆盖图形与被覆盖图形之间有着特殊的关系——存在某种剖分图形全等.

2.面积法

例 2 求证:面积等于1的三角形不能被面积小于2的平行四边形所覆盖.

分析 即题即若 $S_{\triangle PQR}=1, S_{\square ABCD}<2$,则$\triangle PQR$不在平行四边形$ABCD$内部,它的等价说法是:若$\triangle PQR$在平行四边形$ABCD$内部,则

$$S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$$

证明 如图8.30,$\triangle PQR$在平行四边形$ABCD$内部,过P作$MN/\!/AB$,则

$$S_{\triangle PQE}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square ABMN}, S_{\triangle PRE}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square MCDN}$$

上面两式相加即证.

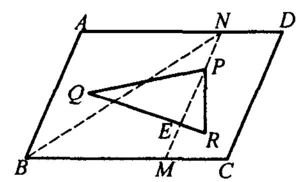


图 8.30

从上例可以看出:平面上面积为S的固定区域能用n个面积分别是$S_1,S_2,\cdots,S_n$的区域完全覆盖的必要条件是

$$S_1+S_2+\cdots+S_n\geqslant S$$

但是,反过来,当 $S_1+S_2+\cdots+S_n\geqslant S$ 时,这n个区域的全体却未必能完全盖住面积为S的区域,例如前面的例1及其后面的两道题.又例如,无论怎样摆弄两个壹分的硬币都不可能盖住一个贰分的硬币,这也就是后面的例3.

3.点集直径法、边界法、带形宽度法

下面,先给出一般点集的直径的定义.

把点集M中任意两点A、B的距离AB的最大值记为d,即 $d=\max\{AB\}$,如果d是一个有限数,那么称d是点集M的直径.

显然,当点集M是圆时,点集M的直径就是通常所说的圆的直径.当点集M是三角形时,这个三角形的最长边就是点集M的直径,等等.

一个点集的直径不一定只有一条.

关于覆盖问题与直径的关系,有如下简单而实用的结论:如果点集M能覆盖点集N,那么由于N是M的子集,所以点集N的直径小于等于点集M的直径,反过来,如果点集N的直径大于点集M的直径,那么M不能覆盖点集N.

例 3 求证:一个直径为$2r$的圆不可能被两个直径小于$2r$的圆所覆盖.

证法 1 (点集直径法)设一个半径小于r的圆O_1已经放在圆$O(O,r)$的上面,作圆O的直径$AB\perp$连心线OO_1(若O_1与O重合,则AB为圆O的任一条直径),A、B不可能同时属于圆O_1,否则圆O_1的直径大于等于AB,与已知条件矛盾,由于图8.31是关于圆O_1对称的轴对称图形,$O_1A=O_1B$,因此A、B两点都不属于圆O_1,另一个半径小于r的圆O_2也不可能同时覆盖A、B两点,

否则圆 O_2 的直径大于等于 AB.

于是 A、B 两点中至少有一个点不属于圆 $O_1\cup$ 圆 O_2,即圆 O_1 与圆 O_2 不能覆盖圆 $O(O,r)$.

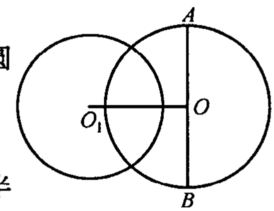


图 8.31

证法 2　(边界法)考察圆 $O(O,r)$ 的圆周,每一个半径小于 r 的圆不能覆盖圆 O 的圆周的一半,否则这个小圆覆盖圆 O 的同一直径的两个端点,与小圆的半径小于 r 矛盾.因此,两个半径小于 r 的圆不能覆盖整个圆 $O(O,r)$ 的圆周当然不能覆盖圆 $O(O,r)$.

证法 3　(带形宽度法)由于直径为 $2r$ 的圆在任何一个方向上的圆上两点距离均可达到 $2r$.因此只须证明两个小圆无论怎样摆,至少在一个方向上覆盖的距离(带形宽度)小于 $2r$ 就行了.设两小圆圆 O_1、圆 O_2 的直径为 d_1、d_2,且 $d_1\leqslant d_2<2r$.如图 8.32 为任一种摆法.联结 O_1O_2,作圆 O_2 的平行于 O_1O_2 的两条切线 l_1 和 l_2 得带形,则带形的宽(l_1 与 l_2 间的距离)等于 d_2.圆 O_1、圆 O_2 完全在带形内,但 $d_2<2r$.故在垂直于连心线 O_1O_2 的方向上所覆盖的距离小于 $2r$,即证.

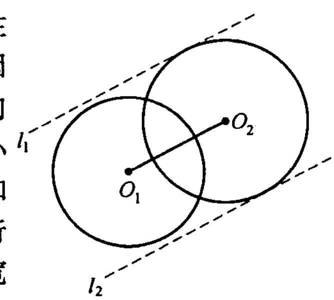


图 8.32

4.反证法

反证法是讨论覆盖问题的重要方法.

例 4　已知四个半平面可以盖住全平面,证明可以从中选出三个半平面仍能盖住全平面.

(匈牙利数学奥林匹克题 156 题)

证明　如果任意三个半平面都不能盖住全平面,记这四个半平面为 M_1、M_2、M_3、M_4,设点 A_1 不能被 M_2、M_3、M_4 盖住,点 A_2 不能被 M_1、M_3、M_4 盖住,点 A_3 不能被 M_1、M_2、M_4 盖住,点 A_4 不能被 M_1、M_2、M_3 盖住,考虑这四个点 A_1、A_2、A_3、A_4 的位置关系,有且只有下列三种关系:

(i)有三点共线,不妨设 A_1、A_2、A_3 共线,由于 A_2 必被 M_2 盖住,故 A_1、A_3 中必有一被 M_2 盖住,否则,线段 $A_1A_2\notin$ 平面 M_2,从而 $A_2\notin M_2$,矛盾,但无论是 A_1 或 A_2 被 M_2 盖住,都与它们的定义矛盾.

(ii)有三点构成三角形而一点在三角形内,不妨设 A_4 在$\triangle A_1A_2A_3$ 内,如图 8.33 所示,联结 A_2A_4 并延长交 A_1A_3 于 P_1 点,则 A_2、P 之一必被M_4 盖住.否则,有线段$A_2P \notin M_4$,从而 $A_4 \notin M_4$ 矛盾,若 M_4 盖住 A_2,与 A_2 的定义矛盾.若 M_4 盖住 P,则 A_1、A_3 中必有一个被 M_4 盖住,也产生矛盾.

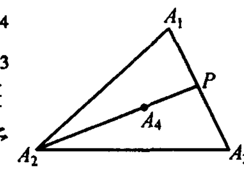


图 8.33

(iii)四点构成凸四边形,如图 8.34 所示.设凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的对角线交于 Q,由于四个半平面能盖住全平面,所以 Q 必被某个半平面盖住,不妨设是 M_1.则 A_2、A_4 必有一点被 M_1 盖住,产生矛盾.

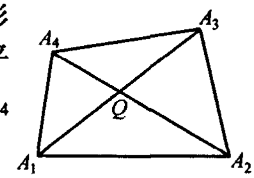


图 8.34

归纳这些矛盾,证明了我们的结论.

5.覆盖定理法

覆盖定理主要有海莱(Helly)覆盖定理、波莱尔(Borel)覆盖定理、维太利(Vitali)覆盖定理等.近代分析中人们有时把波赖尔覆盖定理和维太利覆盖定理等还称为覆盖原理,这些定理在近代分析理论中扮演着重要的角色.这里主要介绍海莱定理的两种叙述形式及应用.

为此,我们先介绍一下凸集的概念:

如果对于点集 M 中任意两点 A、B,线段 AB 的每一点都属于点集 M,那么 M 就称为凸集.

显然线段、直线、射线、带形、整个平面、半(并与闭)平面都是凸集,凸曲线所围成的图形,如圆、凸多边形等都是凸集,凸多面体也是凸集等.

海莱定理 如果点集 $M_1, M_2, \cdots, M_n (n \geqslant 3)$覆盖全平面,并且它们的补集 $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \cdots, \overline{M}_n$ 都是凸集,那么可以从 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 中选出三个集合仍覆盖全平面.

这个定理的证明可对凸集的个数 n 用数学归纳法.(证略)

显然,前面的例 4 是海莱定理的特例.

上面是海莱定理的补集方式叙述形式,它的一般叙述形式为:

在平面上,设 $M_1, M_2, \cdots, M_n (n \geqslant 3)$是凸集,如果其中每三个集都有公共点,那么这 n 个凸集有公共点.

显然,上述一般形式也可以叙述成:如果 $n(n \geqslant 3)$个凸集无公共点,那么其中一定有三个凸集无公共点.

下面我们用海莱定理讨论一个覆盖问题.

例 5 如果 n 个点 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 中每三个能用一个半径为 r 的圆覆盖，那么这 n 个点能用一个半径为 r 的圆覆盖.

证明 分别以这 n 个点为圆心，r 为半径作 n 个圆圆 O_1，圆 $O_2, \cdots$，圆 O_n. 已知点 B 中任意三点 O_i、O_j、O_k 能被一个半径为 r 的圆覆盖，设这圆圆心为 O，则 OO_i、OO_j、OO_k 均小于等于 r，因此点 O 属于 OO_i、OO_j、OO_k，即这三个圆有公共点.

由于圆 O_1，圆 $O_2, \cdots$，圆 O_n 中任意三个圆有公共点，由海莱定理，这 n 个圆有一个公共点 k，k 属于圆 O_i，则 $kO_i \leqslant r$，即 O_i 属于以 K 为圆心，半径为 r 的圆 $k(i=1,2,\cdots,n)$. 故圆 k 就是覆盖 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 的圆.

例 5 实际上就是荣格(Jung)定理.

二、几类覆盖问题

覆盖问题中讨论得较多的是：不能覆盖问题、最佳覆盖问题、万能覆盖问题、格点覆盖问题等. 前面对不能覆盖问题已讨论了几例，下面我们主要对后几类覆盖略作简介.

1. 最佳覆盖问题

首先给出几个简单图形的覆盖问题，然后看看几道数学竞赛题.

例 6 求覆盖三角形的最小圆.

解 首先注意，一个圆若能覆盖一个三角形，则圆的直径必不能小于三角形的最长边.

其次，可分三种情形给出问题的解答.

(i)如图 8.35，设△ABC 为锐角三角形，这时三角形的外接圆即为覆盖三角形的最小圆，这是因为，一方面，外接圆显然覆盖此三角形，另一方面，其他覆盖△ABC 的圆，都大于△ABC 的外接圆，例如圆 O 覆盖△ABC，将△ABC 在圆 O 内适当的运动(平移或旋转)，总可以使得三角形有两个顶点(不妨设 B、C)在圆周上，这时，第三个顶点(即 A)在圆 O 内或圆周上，故 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角 $\alpha \leqslant \angle BAC < 90^\circ$，因此圆 O 的直径等于 $\frac{BC}{\sin \alpha} \geqslant \frac{BC}{\sin \angle BAC} =$ △ABC 外接圆的直径.

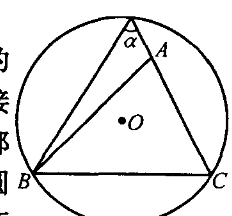


图 8.35

(ii)设△ABC 为钝角三角形，$\angle A$ 为钝角，这时，以最长边 BC 为直径作圆 P，由于 $\angle A$ 是钝角，故对于△ABC 内的任一点 A'，$\angle BA'C \geqslant \angle BAC > 90^\circ$，故 A'

属于圆 P,从而圆 P 即为所求的圆.

(iii)设$\triangle ABC$ 为直角三角形.与(ii)类似,以斜边为直径的圆(即$\triangle ABC$ 的外接圆)即为所求.

例 7 求覆盖凸四边形的最小圆.

类似于例 6,由于四边形 $ABCD$ 中,必有一对对角之和不小于 180°,不妨设 $\angle A+\angle C\geqslant 180°$ 及 $\angle C\geqslant 90°$,分三种情况讨论得:

(i)$\angle A\geqslant 90°$时,以 BD 为直径的圆即是;

(ii)当$\angle A<90°$时,且$\triangle ABD$ 为锐角三角形时,$\triangle ABD$ 的外接圆即是;

(iii)当$\angle A<90°$时,且$\triangle ABD$ 为非锐角三角形时,以 AB 为直径的圆即是.

在此也顺便指出:如果点集 M 能被一个圆覆盖,那么则称 M 是有界点集,例如圆、三角形、多边形、椭圆等都是有界点集,抛物线就不是有界点集.如果点集 M 是有界点集,覆盖 M 的圆中最小的一个叫做 M 的最小覆盖圆(又叫切比雪夫圆),上面例 6、例 7 就是求这样的圆,最小覆盖圆的半径叫做点集 M 的覆盖半径(也叫切比雪夫半径).对于有界点集 M 的最小覆盖圆,它一定是存在的且是唯一的.(证略.参见浙江《教学与研究》(数学)1987(3):35)

例 8 试求覆盖边长为 a 的等边三角形的最小正方形的边长.

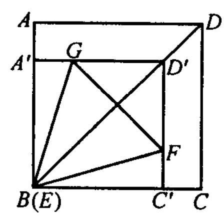


图 8.36

解 如图 8.36,设等边$\triangle EFG$ 被正方形 $ABCD$ 覆盖,先将正方形平移,使 B 和 E 重合,且仍保持正方形 $ABCD$ 覆盖$\triangle EFG$.联结 BD,显然 F、G 在 BD 的两侧,旋转正方形 $ABCD$,使$\angle AEG=\angle CEF$;过 F 和 G 分别作 CD、AD 的平行线 $C'D'$、$A'D'$,易知 $A'BC'D'$ 是正方形,且是覆盖$\triangle EFG$ 的最小正方形,这个正方形的边长

$$A'B=BG\cos\angle A'BG=a\cos 15°=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})a$$

为所求.

例 9 求覆盖边长为 1 的正方形的最小正三角形的边长.

解 设正方形 $ABCD$ 被正$\triangle EFG$ 覆盖,可以假定$\triangle EFG$ 的每一条边上至少有正方形的一个顶角,否则,将三角形的边平移到与正方形相接,可得到面积更小的正三角形,于是,我们可分以下两种情形.

(i)正方形有一个顶点不在三角形的边上,如图 8.37(a)所示,这时

$$EF=AF+AE=\frac{\sin\alpha}{\sin 60°}+\frac{\sin\beta}{\sin 60°}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\alpha+\sin\beta)=$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

但　　$\alpha+\beta=360^\circ-60^\circ-60^\circ-90^\circ=150^\circ$

且　　$60^\circ<\alpha<90^\circ, 60^\circ<\beta<90^\circ$

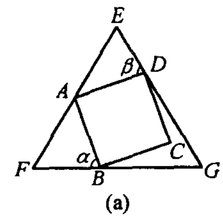
故　　$-30^\circ<\alpha-\beta<30^\circ$

于是 $EF=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ}{2}=$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(ii)正方形的四个顶点全在三角形的边上,如图 8.37(b)所示,这时

$$EF=ED+DF=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$



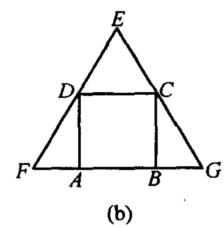


图 8.37

由上可知,所求正三角形边长为 $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 10　设小圆的半径为 $\frac{1}{2}r$,大圆的半径为 r,试问:最少要用多少个这样的小圆才能将大圆盖住?试证之.

(匈牙利奥林匹克题 144 题)

解　由于大圆的面积为 πr^2,小圆的面积为 $\frac{1}{4}\pi r^2$.显然 4 个小圆不重叠地摆在一起,无论怎样摆其间总有空隙,因此不能完全盖住大圆.那么 5 个小圆呢?由于小圆的直径为 r,将大圆圆周六等分,每段弧上两点间最大距离也是 r,因此 5 个小圆连大圆的圆周也盖不住,由此可推出 6 个小圆也不能盖住大圆,因盖住圆周就要 6 个小圆,这时大圆圆心没能盖住,下面我们证明:7 个小圆能盖住大圆.

如图 8.38,6 个小圆的圆心和大圆的内接正六边形的边的中点重合,第 7 个小圆的圆和大圆圆心重合,这样分布的 7 个小圆能盖住大圆.这是因为,若设 AB 是大圆的内接正六边形的一边,C 是中点,D 是 OB 的中点,在 $\angle BOC$ 内或边界上任取一点 P,且 $\frac{r}{2}<OP\leqslant r$,则可证得 $CP\leqslant\frac{1}{2}r$.事实上,$\triangle CBD$ 是正三角形,在 OB 上取 $OQ=OP$,则 Q

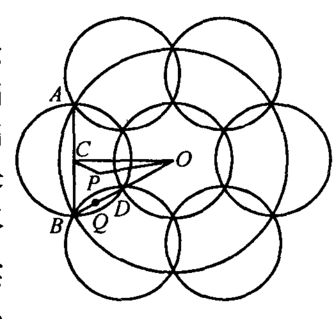


图 8.38

必在 BD 上.即 $CQ\leqslant\frac{1}{2}r$,而 $CP\leqslant CQ$,即证.

2.万能覆盖问题

如果一个点集能覆盖任何直径为 d 的点集,则称之为万能覆盖.下面介绍几种简单的万能覆盖.

例 11 任何直径为 d 的图形,均能被半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}d$ 的圆覆盖.

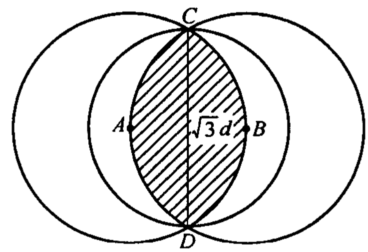


图 8.39

证明 如图 8.39,设图形 M 的直径为 d,不妨设 M 中存在两点 A、B,使 $AB=d$.以 A、B 为圆心,d 为半径作两个圆.则每个圆都覆盖 M,因而两圆的交(即公共部分)亦覆盖 M,以两圆的公共弦 CD 为直径作圆,容易证明此圆覆盖上述两圆之交,因而覆盖 M,可以计算出 CD 之长恰等于$\sqrt{3}d$.故 M 能被半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}d$ 的圆覆盖.证毕.

注 上例中的常数$\frac{\sqrt{3}}{2}$还可以进一步改善,换为更小的数$\frac{\sqrt{3}}{3}$(参见例 13 后面的结论)

例 12 如图 8.40,任何直径为 d 的图形均能被边长为 d 的正方形覆盖,并且此正方形还可以截去一对相邻的小角形,试证之.

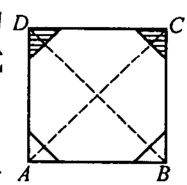


图 8.40

证明 设图形 M 的直径为 d,任作一带形将 M 夹在中间,然后平移带形的边,使带形的宽改变,由于 M 的直径为 d,故可使带形的宽等于 d,而且包含 M.

作两个这样的带形,使它们的边两两相交成 90°的角,这两个带形的交就是覆盖 M 的边长为 d 的正方形.

用垂直于正方形的对角形且与正方形中点相距$\frac{1}{2}d$ 的直线截正方形,截得 4 个小角形.相对的小角形中点的距离大于 d,故其中必有一个不含有 M 的点,将这个小角形截去.这样,可以截去正方形的一对相邻的小角形,截去后得到的图形仍然覆盖 M.

例 13 若图形 M 的直径小于等于 d,则 M 必被边长为$\sqrt{3}d$ 的正三角形覆

盖.

证明　如图 8.41,作三个宽为 d 的带形,它们的边两两相交成 60°的角,并且都包含 M,则可以得到如图所示的两个正三角形 ABC 及 $A'B'C'$,它们均覆盖 M.

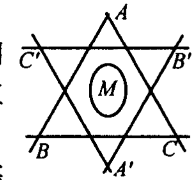


图 8.41

我们证明 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中至少有一个的边长小于等于 $\sqrt{3}d$.为此,设 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 的高为 h 及 h',在两个三角形的公共部分中任取一点 P,作 P 到两个三角形的各边的距离.由于"正三角形中的任一点到三边的距离之和等于此三角形的高".故这六段距离之和等于 $h+h'$,又这六段距离之和恰等于三个带形的宽度之和,故得 $h+h'=3d$.于是其中至少有一个(设为 h)不大于 $\frac{3}{2}d$.此时,$\triangle ABC$ 的边长等于 $\frac{2}{\sqrt{3}}hd=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}d=\sqrt{3}d$.故 M 能被一边长为 $\sqrt{3}d$ 的正三角形覆盖.

由上例可以推出:每一个直径为 d 的点集能用一个边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 的正方形覆盖.(由于这样的正六边形内接于半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 的圆,于是便有例 11 后注中的说明)

例 14　直径为 $2r$ 的图形,一定可以被一个面积为 S,周长为 $\frac{S}{r}$ 的凸多边形覆盖.

证明　设 $a_1,\cdots,a_n$ 为凸多边形 A 的各边之长.由于 A 是凸多边形,所以它位于各边的一侧.以各边为底边,以 r 为高,向 A 的所在一侧作一矩形 Q_k,这样得到 n 个矩形 $Q_1,\cdots,Q_n$.设其面积为 S_k.则 $S_k=a_kr$,又因 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{S}{r}$,所以

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=S$$

另一方面,凸多边形相邻两边的交角小于 180°,从而这些矩形每相邻两个都有一部分互相重叠,这表明矩形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 不可能覆盖整个多边形 A.设 O 是 A 中未被任一 Q_k 覆盖的点,那么 O 到各边的距离大于 r,因此以 O 为圆心,r 为半径的圆被 A 所覆盖,由此即证命题成立.

3.格点覆盖问题

在覆盖问题中,被覆盖的对象也可以是离散的量(例 5、例 10),特别的也是最重要的一类问题是平面区域覆盖格点(即整点)的问题.

例 15　两边平行于坐标轴的正方形,如果它不覆盖格点,则它的面积最大是 1.

证明 任取正方形 $ABCD$，如图 8.42 所示，假定 AB 和 BC 分别平行横坐标轴和纵坐标轴，假定它的面积大于 1，即边长大于 1，我们只要证明：这正方形至少覆盖一个格点.

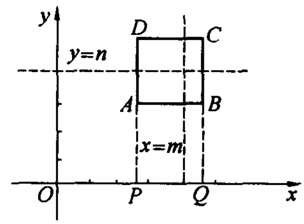


图 8.42

延长 DA、CB，使和横坐标轴 Ox 交于 P、Q，设这二点离 O 的距离分别是 p 和 q，$p<q$. 由假设，正方形边长是 $q-p>1$.

设 m 是 q 的整数部分，那么当 q 不是整数时，$q=m+r$，其中 m 是整数，而 $0<r<1$. 代入上面的不等式，得到 $m+r-p>1$，即 $m-p>1-r>0$，因此 $p<m<q$，这表明直线 $x=m$ 穿过直线 AD 和 BC 之间，又当 q 是整数时，可取 $m=q-1$，仿上，可以找到一条直线 $y=n$，穿过直线 DC 和 AB 之间，它们的交点 (m,n) 是一个格，这格点就在正方形 $ABCD$ 的内部. 于是命题获证.

由上例，我们还可讨论不覆盖格点的圆，正方形的面积的最大值；只覆盖一个格点的圆，正方形的面积的最大值.

例 16 把一个半径为 1.1 的圆形纸片放到直角坐标平面上，问纸片最少要盖住几个格点？最多能盖住几个格点(整点)？

解 (i)圆形纸片可以盖住两个整点，事实上，如图 8.43(a)所示，把圆心 M 置于某个小正方形一边的中点，那么

$$MA=MB=\frac{1}{2}$$

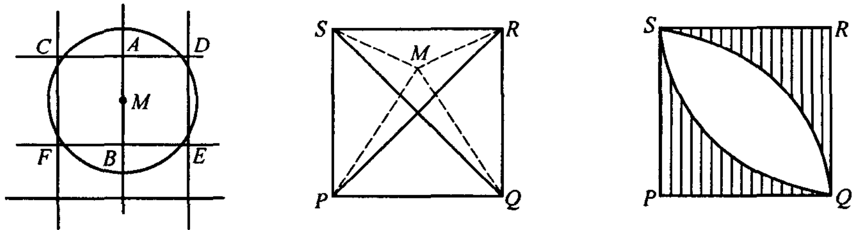
故点 A、B 在圆 M 内，而

$$MC=MD=ME=MF=\frac{\sqrt{2}}{2}>1.1$$

故点 C、D、E、F 在圆 M 外，至于其他整点，到 M 的距离均大于 MC，不可能在圆 M 内. 下面证明纸片至少盖住两个整点.

设圆心 M 落在某一个小正方形 $PQRS$ 的内部或边上，如图 8.43(b)所示，那么，在 MP、MQ、MR、MS 中至少有一个不大于对角线的一半即不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，不失一般性，设 $MS\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，由于 $MS\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1.1$，整点 S 必在圆 M 内，故圆 M 内不可能没有整点.

若圆 M 只覆盖一个整点 S，那么 $MP>1.1>1$. 因此，点 M 在以 P 为圆心，1 为半径的圆外. 同理，点 M 也应在以 R 为圆心，1 为半径的圆外(图 8.34(c))是



(a)　(b)　(c)

图 8.43

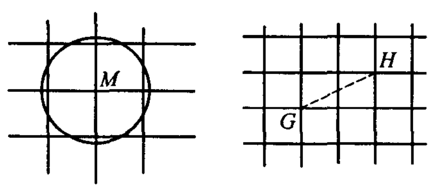
不可能的,因为扇形 PSQ 和扇形 RSQ 已经覆盖了整个正方形,而 M 应在正方形内,故圆 M 内不可能只覆盖一个整点.

综上所述,圆形纸片至少要盖住两个整点.

(ii)圆片可以盖住五个整点.

显然这只要把圆心 M 放在一个整点就可以了.下面证明圆片不可能盖住更多的整点.

显然,若圆 M 要盖住五个以上的整点,无论怎样选择五个整点,其中至少有一对整点的距离将不小于 GH,如图 8.44 所示,而 $GH=\sqrt{5}>2.2$,直径为 2.2 的圆是不可能盖这一对整点的,故图片最多只能盖住五个整点.



(a)　(b)

图 8.44

4. ***维太利型覆盖问题***

例 17　设平面上有有限个圆覆盖着面积为 S 的区域,求证从中可以选出若干个互不相交的圆使之覆盖面积大于等于$\frac{1}{9}S$.

证明　由于只有有限个圆,所以可以取出其中半径最大的一个(当有几个半径达到最大的圆时任取其中的一个),设此圆的圆心为 O_1,半径为 r_1.于是面积等于 $A_1=\pi r_1^2$,去掉与圆 O_1 相交的一切圆,余下的圆和圆 O_1 不相交,设被去掉的圆和圆 O_1 覆盖的总面积为 S_1,由于和圆 O_1 相交的圆半径不会超过 r_1,所

以它们和圆 O_1 一起全部落在以 O_1 为圆心,$3r_1$ 为半径的圆中,这表明有 $S_1\leqslant 9\pi r_1^2$,从而 $A_1\geqslant\frac{1}{9}S_1$.

在和圆 O_1 不相交的有限多个圆中再取半径最大的一个,设其圆心为 O_2,半径为 r_2,面积为 $A_2=\pi r_2^2$,去掉与圆 O_2 相交的一切圆,余下的圆与圆 O_1 以及圆 O_2 都不相交,设第二次被去掉的圆与圆 O_2 所覆盖的总面积为 S_2,则 $S_2\leqslant 9\pi r_2^2$,从而 $A_2\geqslant\frac{1}{9}S_2$.

如果继续下去,至第 k 步全部取、弃完毕.设第 j 步取出的圆面积为 $A_j=\pi r_j^2$,而它与在第 j 步被弃去的圆盖住的面积为 S_i,那么

$$A_j\geqslant\frac{1}{9}S_i,\quad j=1,2,\cdots,k$$

因此

$$A_1+A_2+\cdots+A_k\geqslant\frac{1}{9}(S_1+S_2+\cdots+S_k)$$

显然

$$S_1+S_2+\cdots+S_k\geqslant S$$

 因此

$$A_1+A_2+\cdots+A_k\geqslant\frac{1}{9}S$$

类似于上例,我们可以证明如下问题.

(1)设平面上有有限多个正方形,覆盖面积为 S 的区域,求证:可从中取出若干个互不相交的正方形,使之覆盖面积大于等于 $\frac{S}{1+2\pi+4\sqrt{2}}$.

(2)设平面上有有限多个正三角形,覆盖面积为 S 的区域,求证:可以从中取出若干个互不相交的正三角形,使其覆盖面积大于等于 $\frac{S}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$.

(3)设平面上有有限个形状相同的多边形覆盖面积为 S 的区域,求证:存在常数 α,$0<\alpha<1$,它仅与多边形形状有关,使得可以从上述覆盖中选出若干个互不相交的多边形覆盖面积大于等于 αS 的区域.

一般地,成立着下述的维太利型覆盖定理:

设平面上有有限多个形状相似的图形,它们覆盖面积为 S 的区域.那么存在数 α,$0<\alpha<1$,它仅与相似形的形状有关,使得总可以从上述覆盖选出若干个互不相交的图形,其覆盖面积大于等于 αS.

第9章　1987～1988年度试题的诠释

试题A　如图9.1，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$绕点A在平面上旋转．试证：不论$\triangle ADE$旋转到什么位置，线段EC上必存在点M，使$\triangle BMD$为等腰直角三角形．

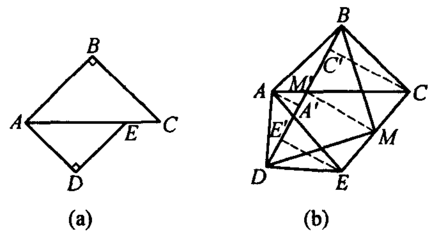


图9.1

证法1　因$\triangle ABC$与$\triangle ADE$不全等，则不论$\triangle ADE$在平面上绕点A怎样旋转，BD、CE必不为零，且B、C、D、E四点不共线．

过A、C、E及CE的中点M作BD的垂线，交BD或BD的延长线于A'、C'、E'及M'，如图9.1(b)所示．容易证得

$$\triangle AA'B \cong \triangle BC'C, \triangle AA'D \cong \triangle DE'E$$

有
$$CC' = BA', EE' = DA', BC' = AA' = DE'$$

又$MM' /\!/ CC' /\!/ EE'$，且M是EC的中点，于是，当C、E位于BD同侧时如图9.1(b)所示．

$$MM' = \frac{1}{2}(CC' + EE') = \frac{1}{2}(BA' + A'D) = \frac{1}{2}BD$$

当C、E位于BD异侧时如图9.2所示．

$$MM' = \frac{1}{2}|CC' - EE'| = \frac{1}{2}|BA' - DA'| = \frac{1}{2}BD$$

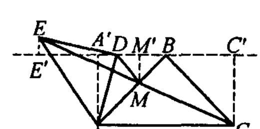


图9.2

当E在BD上时，E与E'重合，同样有

$$MM' = \frac{1}{2}BD$$

而C不可能在BD上．$MM' \neq 0$，否则将有$\triangle ABC \cong \triangle ADE$，与题设矛盾．总

之，M'是BD的中点，所以$\triangle BMD$为等腰直角三角形.

证法2 先设$\triangle BMD$为等腰直角三角形，再证点M在CE上，运用反射变换来证.

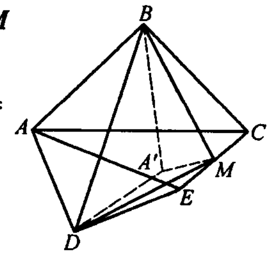


图9.3

如图9.3，作A关于BD的轴反射点A'，则$\angle A'DB=\angle ADB$，由$\angle ADE=90^\circ=2\angle BDM$，有

$$\angle EDM=\angle A'DM=|45^\circ-\angle A'DB|=$$
$$|90^\circ-45^\circ-\angle ADB|$$

又$DA'=DA=DE$，则知A'又是E关于DM的轴反射点.

同理，A'也是C关于BM的轴反射点.从而

$$\angle EMD=\angle A'MD, \angle CMB=\angle A'MB$$

而$\angle BMD=90^\circ$，知$\angle CME=180^\circ$，故点M在BC上.

证法3 先取CE的中点，再证$\triangle BDM$为等腰直角三角形，运用旋转变换来证.

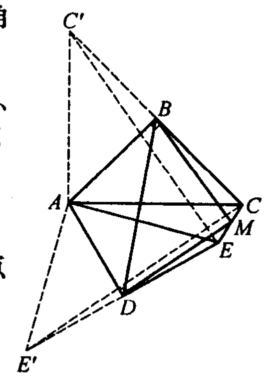


图9.4

如图9.4，延长CB到C'，使$BC'=BC$，联结AC'、EC'.将$\triangle AC'E$线点A顺时针方向旋转90°得$\triangle ACE'$，则

$$\triangle AC'E \cong \triangle ACE'$$

且
$$\angle C'AC=\angle EAE'=90^\circ$$

从而由$AE=AE'$有$\angle ADE=\angle ADE'$，即知E、D、E'三点共，且D为EE'的中点.再由

$$BM \perp\!\!\!= \frac{1}{2}C'E, DM=\frac{1}{2}CE'$$

且$C'E\perp CE'$，即证得$\triangle BDM$为等腰直角三角形.

证法4 （罗增儒给出）如图9.5，取AC的中点P，AE的中点Q，CE的中点M，BD的中点N.由等腰直角三角形知，$BP\perp AC$，$BP=\frac{1}{2}AC$；又由三角形中位线的性质知$MQ/\!/AC$，$MQ=\frac{1}{2}AC$（特殊情况下MQ与AC共线，依然有$MQ=\frac{1}{2}AC$（图9.5(b)）.于是BP与MQ垂直并且相等.同理，DQ与MP也垂直并且相等.于是，D、Q、M三点可由M、P、B三点旋转90°（绕N）得到.于是MD可以由BM旋转90°得到.即CE上总存在中点M使$\triangle BMD$为等腰直角三角形.

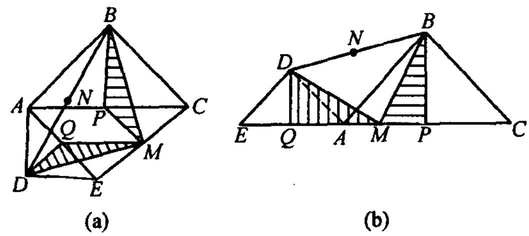


图 9.5

证法 5 如图 9.6,以 BD 的中点为原点 O,以 BD 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,可设 $A(c,b)$、$B(-a,0)$、$D(a,0)$、$C(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$,则由 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$,有

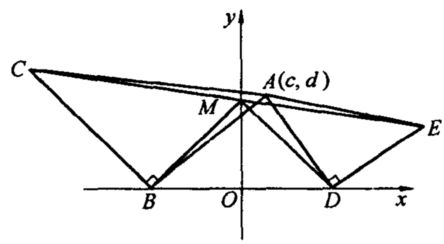


图 9.6

$$\frac{b}{a+c}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=-1$$

又由 $|AB|=|BC|$,有

$$b^2+(a+c)^2=y_1^2+(x_1+a)^2$$

解得

$$x_1=-(a+b),y_1=a+c$$

同理

$$x_2=a+b,y_2=a-c$$

故 CE 的中点 M 的坐标为 $x=0,y=a$,从而$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

证法 6 如图 9.7,设 A 为坐标原点,由 A 到 C 的方向为 x 轴正向,建立直角坐标系.$\triangle ADE$ 绕点 A 旋转后,设 x 轴正向按逆时针旋转到 AD 的角为 θ,则 AE 与 x 轴正向夹角为 $\theta+\frac{\pi}{4}$.

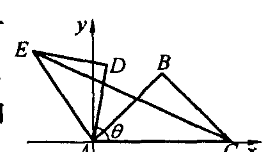


图 9.7

再设$\triangle ADE$ 的直角边长为 1,$\triangle ABC$ 的直角边长为 a,$a>1$,则 A、B、C、D、E 坐标分别为

$$A(0,0),B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),C(\sqrt{2}a,0),D(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$E\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

直线 CE 的方程是

$$y=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-a}(x-\sqrt{2}a)$$

即

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)x+\left[a-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]-y=\sqrt{2}a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \quad ①$$

设点 M 在直线 CE 上,其坐标为(x,y),且$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形,则点 M 的坐标除了满足式①外,还必须满足以下两个方程.

一个是等腰条件,即

$$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

即

$$(\sqrt{2}a-2\cos\theta)x+(\sqrt{2}a-2\sin\theta)y=a^2-1 \quad ②$$

式②就是线段 BD 的垂直平分线方程.

另一个是垂直条件,即

$$\frac{y-\sin\theta}{x-\cos\theta}\cdot\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=-1 \quad ③$$

解由①、②组成的关于 x、y 的二元一次方程,注意到

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) & a-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}a-2\cos\theta & \sqrt{2}a-2\sin\theta\end{vmatrix}=-\sqrt{2}a^2+4a\cos\theta-\sqrt{2}$$

当 $\Delta\neq0$ 时,由①、②组成的方程组有唯一解,那当 $\cos\theta\neq\frac{a^2+1}{2\sqrt{2}a}$时,方程组有唯一解.

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\\ y=\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)\end{cases} \quad ④$$

将上述 x、y 值代入式③左端得

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}=-1$$

所以④满足式③,从而④即为所求满足题设条件的点的坐标.此点恰为线段 CE 的中点.

当 $\cos\theta=\dfrac{a^2+1}{2\sqrt{2}a}$时,有

$$\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}a-2\cos\theta}=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}a-\frac{a^2+1}{\sqrt{2}a}}=\frac{\sqrt{2}a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{a^2-1}$$

所以,BD 的垂直平分线与 CE 重合,取 CE 的中点 M,代入②、③显然满足.

综上所述,可以对一切 $a>1$,无论$\triangle ADE$ 绕点 A 怎样旋转,线段 CE 上总存在中点 M,使$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

证法7 把$\triangle ABC$ 置放在复平面中,使 A、B、C 所对应的复数分别为 0、$ae^{\frac{\pi}{4}i}$、$\sqrt{2}a(a>1)$.设 $AD=1$,则 D、E 所对应的复数分别为 $e^{\theta i}$,$\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}$,$CE$ 中点 M 所对应的复数为$\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})$,于是

$$|BD|=|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\theta i}|$$

$$|BM|=\left|ae^{\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\theta i}|$$

$$|DM|=\left|e^{\theta i}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}ae^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{i\theta}|$$

(其中注意到$\sqrt{2}=e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}$)

从而,$|BM|=|DM|=\frac{\sqrt{2}}{2}|BD|$.由此即证$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

证法8 把$\triangle ABC$ 置放在复平面中,使得 A、B、C 所对应的复数分别为 0、$ae^{\frac{\pi}{4}i}$、$\sqrt{2}a(a>1)$,又设 $AD=1$,D、E 对应的复数为 $e^{i\theta}$、$\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}$,并以 DB 为斜边作等腰 Rt$\triangle DMB$(D、M、B 按顺时针方向),点 D、M、B 对应的复数记为 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{B}$,于是

$$\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})$$

则 $$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}+(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})=e^{i\theta}+\frac{\sqrt{2}}{2}(a-e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})$$

故 $M=\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})$,这说明 M 是线段 EC 的中点.

证法 9 把$\triangle ABC$ 置放在复平面中,使得 A、B、C 所对应的复数分别为 0、$e^{\frac{\pi}{4}i}$、$\sqrt{2}$(其中令 $AB=1$),先设 E 在 AC 上,且设 E 对应的复数为 λ,则 $0<\lambda<\sqrt{2}$,且点 D 对应的复数为$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$,当$\triangle ADE$ 绕 A 旋转任一角度 θ 之后,点 E 对应的复数为 $\lambda e^{i\theta}$,而点 D 对应复数变为$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i}$,取 EC 的中点为 M,则点 M 对应的复数为$\frac{1}{2}(\lambda e^{i\theta}+\sqrt{2})$,考察三点 B、M、D 所对应的复数,易见

$$\boldsymbol{M}(1+i)=\boldsymbol{M}\cdot\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}+e^{\frac{\pi}{4}i}=\boldsymbol{D}\cdot i+\boldsymbol{B}$$

由此得出

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M})i=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{M}$$

由此即证.

证法 10 因$|AB|>|AD|$,故 B、D 不重合,把两三角形放置在同一复平面中,使 BD 中点为原点,BD 所在直线为实轴,各顶点对应的复数用其顶点表示,且设

$$\boldsymbol{B}=-1,\boldsymbol{D}=1$$

则
$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D})(-i)=-(\boldsymbol{A}-1)i$$

从而
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{A}-1)i=1-(\boldsymbol{A}-1)i$$

同理
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})i=-1+(\boldsymbol{A}+1)i$$

设 BC 中点为 M,则

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C})=i$$

这说明$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

证法 11 把两三角形放置在同一复平面中,向量与对应复数可分别设为 $\overrightarrow{BA}:z_1$,$\overrightarrow{DE}:z_2$,则$\overrightarrow{BC}:z_1i$,$\overrightarrow{DA}:z_2i$,$\overrightarrow{AC}:z_1i-z_1$,$\overrightarrow{AE}:z_2-z_1i$,从而

$$\overrightarrow{CE}:(z_1+z_2)-(z_1+z_2)i$$

设 M 是所求的点,且记$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CE}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$\overrightarrow{MB}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})$,于是$\overrightarrow{MB}$对应的复数

$$z=-z_1\mathrm{i}-\lambda(z_1+z_2)+\lambda(z_1+z_2)\mathrm{i}=-\lambda(z_1+z_2)-(1-\lambda)z_1\mathrm{i}+\lambda z_2\mathrm{i}$$

则

$$z\cdot\mathrm{i}=(1-\lambda)z_i=(1-\lambda)z_1-\lambda z_2-\lambda(z_1+z_2)\mathrm{i} \qquad (*)$$

又$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{DE}$,则$\overrightarrow{MD}$对应的复数

$$z'=(1-\lambda)[(z_1+z_2)-(z_1+z_2)\mathrm{i}]-z_2=(1-\lambda)z_1-\lambda z_2-(1-\lambda)(z_1+z_2)\mathrm{i} \qquad (**)$$

若$\triangle BMD$为等腰直角三角形,只须$z\mathrm{i}=z'$,比较$(*)$、$(**)$两式可知$\lambda=1-\lambda$,即$\lambda=\frac{1}{2}$,即M为BC中点.

证法 12　如图 9.8,设D对应的复数为$z_D=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R},a\neq b$,且$a$、$b$不同时为 0),点$B$对应的复数为$z_B=1+\mathrm{i}$,依题意$z_C=2$.则

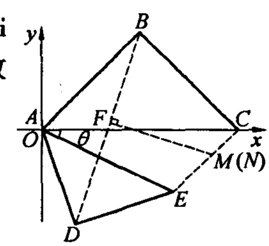


图 9.8

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}\mathrm{i}=-b+a\mathrm{i}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=(a-b)+(a+b)\mathrm{i}$$

设BD中点为F,则

$$z_F=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1+a}{2}+\frac{1+b}{2}\mathrm{i}$$

将$\overrightarrow{FB}$绕F顺时针方向转动$\frac{\pi}{2}$到$\overrightarrow{FN}$的位置.则

$$\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{FB}\cdot(-\mathrm{i})=\frac{1-b}{2}-\frac{1-a}{2}\mathrm{i},|FN|\neq 0$$

故

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=\frac{2+a-b}{2}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}$$

又由于$\overrightarrow{EC}$之中点M对应复数为

$$z_M=\frac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{2+a-b}{2}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}$$

可见M、N重合.故$\triangle BMD$为等腰直角三角形,原题得证.

证法 13　如图 9.9,以AC为实轴过A作垂直于AC的直线为虚轴建立复平面.$\triangle ADE$转至如图之任一位置.

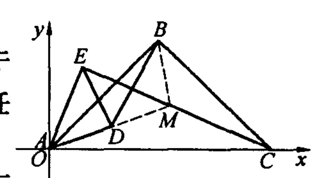


图 9.9

设B、D两点代表的复数即为$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$,则由等腰直角三角形性质知,C、E两点复数分别为$\boldsymbol{B}(1-\mathrm{i})$、

$D(1+\mathrm{i})$. 设连线 CE 的中点为 M,则

$$M=\frac{C+E}{2}=\frac{B(1-\mathrm{i})}{2}+\frac{D(1+\mathrm{i})}{2}$$

从而$\overrightarrow{MB}$为
$$B-\frac{B(1-\mathrm{i})}{2}-\frac{D(1+\mathrm{i})}{2}$$

$\overrightarrow{MD}$为
$$D-\frac{B(1-\mathrm{i})+D(1+\mathrm{i})}{2}$$

将上两式整理即得 $\mathrm{i}\,\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$. 由此可知△$BDM$ 即为等腰直角三角形.

注 由上述试题,可演变出一系列相关的几何题,我们不妨称为该试题的直接推论①.

例如,观察图 9.5,若△APB 看成△ABC,△AQD 看成△ADE,则 BD 上一定存在一点 N,使△PNQ 为等腰直角三角形,这就是推论 1.

推论 1 如图 9.5,△ABC 和△ADE 是两个不全等的等腰直角三角形,现固定△ABC,而将△ADE 绕点 A 在平面上旋转. 试证:不论△ADE 旋转到什么位置,对于 AC 的中点 P,AE 的中点 Q,必有 BD 上的一点 N,使△PMQ 为等腰直角三角形.

不需要多少技巧,可由试题得出下列推论.

推论 2 以△ABC 的边 AB、AC 为斜边,向外作等腰直角三角形 ABD 和 ACE. 若 M 是 BC 的中点,则△DME 为等腰直角三角形,如图 9.10 所示.

推论 3 在△ABC 的外面作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,其中心分别为 O_1、O_2,M 是 BC 的中点,则△O_1MO_2 为等腰直角三角形,如图 9.11 所示.

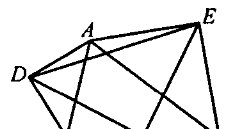


图 9.10

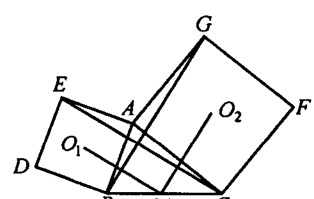


图 9.11

推论 4 在已知锐角△ABC 的外面作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,求证:(1)$BG=CE$;(2)$BG\perp CE$.

推论 5 在△ABC 外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,其中心分别为 O_1、O_2,M、N 分别是 BC、EG 的中点,则 O_1MO_2N 是正方形,如图 9.12 所示.

① 罗增儒. 一道联赛题的旋转解法和推论[J]. 中学生数学. 1988(8):15-16.

推论6　以四边形 $ABCD$ 的各边为边向外作正方形 $ABEF$，$BCGH$，$CDKL$，$DAMN$，其中心分别为 P、Q、R、S，则 $PR=QS$，且 $PR\perp QS$，如图9.13所示.

(提示，联结 AC，则图9.13由两个图9.11组成)

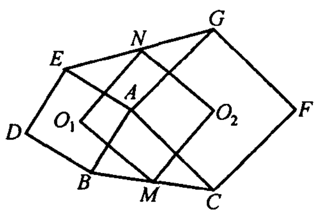


图9.12

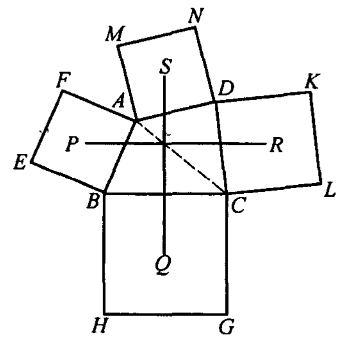


图9.13

试题B　如图9.14，设 C_1、C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的半径的2倍.四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4.试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长大于等于 $2\times$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长，并确定等号成立的条件.

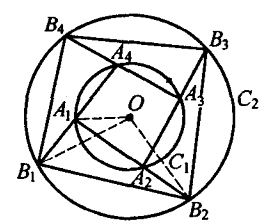


图9.14

证明　注意到拓广的托勒密定理：

设 $ABCD$ 为给定的四边形，那么

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

并且当且仅当 A、B、C、D 四点共圆时，等号成立.

记公共圆心为 O，联结 OA_1、OB_1 和 OB_2.

在四边形 $OA_1B_1B_2$ 中，运用拓广的托勒密定理有

$$OB_1\cdot A_1B_2\leqslant OA_1\cdot B_1B_2+OB_2\cdot A_1B_1$$

因为

$$OB_1=OB_2=2OA_1$$

于是有

$$2A_1B_2\leqslant B_1B_2+2A_1B_1,B_1B_2\geqslant 2A_1B_2-2A_1B_1$$

则

$$B_1B_2\geqslant 2A_1A_2+2A_2B_2-2A_1B_1 \quad ①$$

同理

$$B_2B_3\geqslant 2A_2A_3+2A_3B_3-2A_2B_2 \quad ②$$

$$B_3B_4 \geqslant 2A_3A_4 + 2A_4B_4 - 2A_3B_3 \quad ③$$

$$B_4B_1 \geqslant 2A_4A_1 + 2A_1B_1 - 2A_4B_4 \quad ④$$

①+②+③+④得

$$B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_1 \geqslant 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1) \quad ⑤$$

为使式⑤等号成立,当且仅当①,②,③,④均为等式.

若①为等式,则 O、A_1、B_1、B_2 共圆,这时有

$$\angle OA_1A_2 = \angle OB_1B_2 = \angle OB_2B_1 = \angle A_4A_1O$$

即 OA_1 为 $\angle A_4A_1A_2$ 的平分线.

同理,OA_2、OA_3、OA_4 分别为 $\angle A_1A_2A_3$、$\angle A_2A_3A_4$、$\angle A_3A_4A_1$ 的平分线.

于是 O 也是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆的圆心.

由于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 既有外接圆,又有同圆心的内切圆,所以四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形,即当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形时等号成立.

试题 C1 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 30°$,O 是外心,I 是内心,边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使得 $AD = BE = AB$. 求证:$OI \perp DE$,且 $OI = DE$.

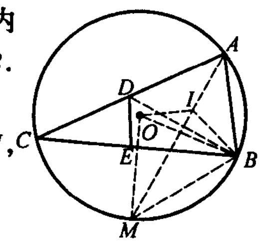


图 9.15

证法 1 如图 9.15,延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M,联结 BD、OM、OB、BM、BI.

因 I 为内心,则 M 平分 $\overset{\frown}{BMC}$. 于是,$OM \perp BC$,且

$$\angle MOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC} = \angle BAC$$

由正弦定理 $\quad AB = 2R\sin 30° = R = OB = OM$

从而 $\quad AD = BE = AB = OB = OM$

从而 $\triangle DAB \cong \triangle MOB$,故 $MB = BD$.

再由 I 是内心可得

$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle CBI =$$

$$\frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 75°$$

$$\angle BMI = \angle BMA = \angle C = 30°$$

则 $\quad \angle MIB = 180° - (\angle BMI + \angle MBI) = 75°$

即 $\quad \angle MIB = \angle MBI, MB = MI$

又 AI 平分 $\angle BAC$,$AD = AB$,故 $BD \perp IM$,从而有 $BD \perp IM$ 且 $BD = MB = IM$.

又 $OM \perp BE$，且 $OM = BE$.

则$\angle OMI$ 和$\angle EBD$ 的两对边分别垂直相等，又都是锐角，从而$\triangle DMI \backsim \triangle EBD$，且通过旋转 $90°$和平移可使两个三角形重合，故 $OI \perp DE$，且 $OI = DE$.

证法 2　如图 9.16，作$\angle DAO$ 的平分线交 BC 于 K，联结 AI、BI、DI、EI、AO，易证

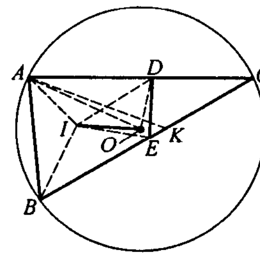


图 9.16

$$\triangle AID \cong \triangle AIB \cong \triangle EIB$$

从而
$$\angle AID = \angle AIB = \angle EIB$$

而
$$\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C = 105°$$

则
$$\angle DIE = 360° - 105° \times 3 = 45°$$

又$\angle AOB = 60°$，知$\triangle AOB$ 为正三角形，从而

$$\angle AKB = 30° + \frac{1}{2}\angle DAO = 30° + \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle BAO) =$$
$$\frac{1}{2}\angle BAC = \angle BAI = \angle BEI$$

于是，知 $AK /\!/ IE$，又由 $AO = AB = AD$，知 $AK \perp DO$. 从而 $DO \perp IE$. 同理 $EO \perp ID$. 故 O 是$\triangle DIE$ 的垂心，于是知 $IO \perp DE$.

由$\angle DIE = \angle IDO = 45°$（因 $DO \perp IE$）及垂心组的性质，知$\triangle IDE$ 与$\triangle IOD$ 的外接圆是等圆，从而 $OI = DE$.

证法 3　如图 9.16，设$\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径分别为 R、r. 联结 AE，因为$\angle C = 30°$，所以

$$AB = AD = BE = 2R\sin 30° = R$$
$$AE = 2AB\sin\frac{B}{2} = 2R\sin\frac{B}{2}$$

又
$$\angle EAD = \angle AEB - 30° = 60° - \frac{\angle B}{2}$$

所以在$\triangle EAD$ 中，由余弦定理

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD\cos\angle EAD =$$
$$R^2 + 4R^2\sin^2\frac{B}{2} - 4R^2\sin\frac{B}{2}\cos(60° - \frac{B}{2}) =$$
$$R^2 - 4R^2\sin^2\frac{B}{2}\left[\sin(30° + \frac{B}{2}) - \sin\frac{B}{2}\right] =$$
$$R^2 - 8R^2\sin 15°\sin\frac{B}{2}\cos(\frac{B}{2} + 15°)$$

由熟知的等式
$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$OI^2=R^2-2Rr$$
知
$$OI^2=R^2-8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$
$$R^2-8R^2\sin 15^\circ\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B+30^\circ}{2}=DE^2$$
$$OI=DE$$

证法4 如图9.17,联结 IA、IB、ID、IE、OA、OB.由正弦定理可得
$$AB=2R\sin C=2R\sin 30^\circ=R=OA=OB$$
即$\triangle OAB$为正三角形.

又 I 为内心,且 $AD=AB=BE$,所以
$$\triangle DAI\cong\triangle BAI\cong\triangle BEI$$

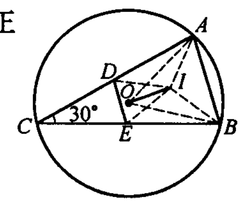


图9.17

从而
$$\angle EIB=\angle DIA=\angle AIB=\frac{1}{2}(180^\circ+\angle C)=105^\circ$$
$$ID=IB, IE=IA$$

以 I 为原点建立复平面.设点 A、B 的复数分别记为 z_1、z_2.不妨设 A、B、C 三点按顺时针方向绕行,如图9.17所示.则$\overrightarrow{ID}$是由$\overrightarrow{IB}$按逆时针方向旋转210°得到的,$\overrightarrow{IE}$是由$\overrightarrow{IA}$按顺时针方向旋转210°得到的,即
$$\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}=z_2\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$
$$\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}=z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$
所以
$$\overrightarrow{DE}=z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
又$\triangle OAB$为负向正三角形,$\overrightarrow{BO}$是由$\overrightarrow{BA}$按逆时针旋转60°得到的,所以
$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=(z_1-z_2)\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BO}=z_2+(z_1-z_2)\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=z_1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}+z_2\cdot(1-e^{i\frac{\pi}{3}})$$
于是
$$i\cdot\overrightarrow{IO}=z_1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot i+z_2\cdot(1-e^{i\frac{\pi}{3}})\cdot i=$$
$$z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
从而
$$\overrightarrow{DE}=i\cdot\overrightarrow{IO}$$
即 $DE\perp OI$ 且 $DE=OI$.

证法 5　(由江苏茹双林给出)因为 $z_B=2\sin A$,所以

$$z_E=2\sin A-1,z_A=2\sin B(\cos C+\mathrm{i}\sin C),\overrightarrow{BE}=-1$$

所以
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$$

有
$$\overrightarrow{AB}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$$

则
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}=\mathrm{e}^{-150^\circ\mathrm{i}}$$

故
$$z_D=\overrightarrow{AD}+z_A=\mathrm{e}^{-150^\circ\mathrm{i}}+2\sin B\mathrm{e}^{30^\circ\mathrm{i}}$$

即
$$\overrightarrow{ED}=\mathrm{e}^{-150^\circ\mathrm{i}}+2\sin B\mathrm{e}^{30^\circ\mathrm{i}}-(2\sin A-1)=$$

$$(\sqrt{3}\sin B-2\sin A+1-\frac{\sqrt{3}}{2})+\mathrm{i}(\sin B-\frac{1}{2})$$

而
$$z_O=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(90^\circ-A)},z_I=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\mathrm{e}^{15^\circ\mathrm{i}}$$

则
$$\overrightarrow{OI}=\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos 15^\circ-\sin A\right)+\mathrm{i}\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin 15^\circ-\cos A\right)$$

即
$$\mathrm{i}\cdot\overrightarrow{OI}=\left(\cos A-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin 15^\circ\right)+\mathrm{i}\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos 15^\circ-\sin A\right)$$

又
$$\angle A+\angle B=150^\circ$$

则可用分析法证明(参见注)

$$\cos A-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin 15^\circ=\sqrt{3}\sin B-2\sin A+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

及
$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos 15^\circ-\sin A=\sin B-\frac{1}{2}$$

从而
$$\overrightarrow{ED}=\mathrm{i}\cdot\overrightarrow{OI}$$

故 $OI\perp DE$ 且 $OI=DE$.

注　$\cos A-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin 15^\circ=\sqrt{3}\sin B-2\sin A+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$\cos A-4\sin\frac{A}{2}\sin(75^\circ-\frac{A}{2})\sin 15^\circ=\sqrt{3}\sin(150^\circ-A)-2\sin A+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$\cos A-\sin A\sin 30^\circ+(1-\cos A)(1-\cos 30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A+\frac{3}{2}\sin A-$

$2\sin A+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos 15^\circ-\sin A=\sin B-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos 15^\circ-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$2\cos 15^\circ(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$-2\cos 15°\sin 15° = -\frac{1}{2}$$

试题 C2 在梯形 $ABCD$ 的下底 AB 上有两定点 M、N，上底 CD 上有一动点 P. 记 $E = DN\cap AP$，$F = DN\cap MC$，$G = MC\cap PB$，$DP = \lambda DC$. 问：当 λ 为何值时，四边形 $PEFG$ 的面积最大？

解法 1 取 DC 为单位长度，即 $DC = 1$，则 $DP = \lambda$，$PC = 1-\lambda$. 设 $AM = a$，$MN = b$，$NB = c$，梯形高为 h.

过 C 作 PB 的平行线交 AB 的延长线于 Q，如图 9.18所示. 则 $PCQB$ 为平行四边形，于是 $BQ = PC = 1-\lambda$. 从而

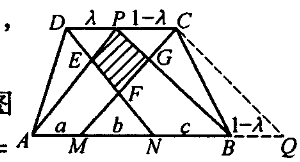


图 9.18

$$S_{\triangle MGB}/S_{\triangle MCQ} = (MB/MQ)^2 = (b+c)^2/(b+c+1-\lambda)^2$$

又
$$S_{\triangle MCQ} = \frac{1}{2}(b+c+1-\lambda)h$$

从而
$$S_{\triangle MGB} = \frac{(b+c)^2 h}{2(b+c+1-\lambda)}$$

类似可得
$$S_{\triangle AEN} = \frac{(a+b)^2 h}{2(a+b+\lambda)}$$

又显然 $S_{\triangle APB}$ 和 $S_{\triangle FMN}$ 是定值，从而由

$$S_{PEFG} = S_{\triangle APB} - (S_{\triangle MGB} + S_{\triangle AEN}) + S_{\triangle FMN}$$

知，当 $S_{\triangle MGB} + S_{\triangle AEN}$ 取最小值时，S_{PEFG} 取最大值. 而

$$S_{\triangle MGB} + S_{\triangle AEN} = \frac{h}{2}\left[\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda} + \frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}\right] \quad ①$$

由柯西不等式得

$$\left[\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda} + \frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}\right]\cdot[(a+b+\lambda)+(b+c+1-\lambda)] \geqslant$$
$$[(a+b)^2+(b+c)^2] = (a+2b+c)^2 \quad ②$$

其中等号当且仅当

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b+\lambda)^2} = \frac{(b+c)^2}{(b+c+1-\lambda)^2}$$

即 $\lambda = \dfrac{a+b}{a+2b+c} = \dfrac{AN}{AN+MB}$ 时成立.

从而，由①、②得

$$S_{\triangle MGB} + S_{\triangle AEN} \geqslant \frac{h}{2}\cdot\frac{(a+2b+c)^2}{a+2b+c+1}$$

当且仅当 $\lambda=\frac{AN}{AN+MB}$ 时，$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}$ 取到最小值，此时 S_{PEFG} 取到最大值.

综上所述，当且仅当 $\lambda=\frac{AN}{AN+MB}$ 时，四边形 $PEFG$ 的面积最大.

解法 2 注意到面积关系

$$S_{PEFG}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ANE}-S_{\triangle MBG}+S_{\triangle MNF}$$

而其中 $S_{\triangle ABP}$ 与 $S_{\triangle MNF}$ 为定值，所以 S_{PEFG} 最大当且仅当 $S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBG}$ 取小值.

记 $AB=a$，$CD=b$，$MN=c$，设 $AN=\mu(a+c)$，于是 $MB=(1-\mu)(a+c)$. 设梯形的高为 1，容易看出

$$S_{\triangle ANE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AN^2}{AN+DP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu^2(a+c)^2}{\mu(a+c)+\lambda b}$$

$$S_{\triangle MBG}=\frac{1}{2}\cdot\frac{MB^2}{MB+PC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\mu)^2(a+c)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

从而有

$$S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBU}=\frac{1}{2}(a+c)^2\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right] \quad ①$$

由柯西不等式

$$\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}=$$

$$\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right]\times$$

$$[\mu(a+c)+\lambda b+(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b]\frac{1}{a+b+c}\geqslant$$

$$(\mu+1-\mu)^2\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+c} \quad ②$$

将①与②结合起来，即得

$$S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBG}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+c)^2}{a+b+c}(\text{定值})$$

其中等号成立当且仅当式②中等号成立，而这又当且仅当

$$\frac{\mu}{\mu(a+c)+\lambda b}=\frac{1-\mu}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

由此解得 $\lambda=\mu$，即当 $\lambda=\mu=AN:(AB+MN)$ 时 S_{PEFG} 取最大值.

第1节 旋转变换[①][②]

将平面图形 F 绕该平面内的一个定点 O 按一定方向旋转一个定角 θ,得到平面图形 F',这样的变换称为旋转变换. O 叫做旋转中心, θ 叫做旋转角.

旋转角为 180°的旋转变换是中心对称变换.

旋转变换前后的图形具有如下性质:

(1)对应线段相等,对应角相等;

(2)对应点位置的排列次序相同;

(3)任意两条对应线段所在直线的夹角都等于旋转角 θ;

(4)旋转中心 O 是旋转变换下的不动点.

通过图 9.19,看到点 A 逆时针旋转 θ 到 A_1,点 B 逆时针旋转 θ 到 B_1,则直线 AB 在逆时针旋转 θ 的变换下变为直线 A_1B_1. 设直线 AB 与直线 A_1B_1 的交点为 P,则易证 $\triangle OAB \cong \triangle OA_1B_1$. 推得线段 $AB = A_1B_1$, $\angle BPB_1 = \theta$,即从直线 AB 到直线 A_1B_1 所夹的角等于旋转角 θ.

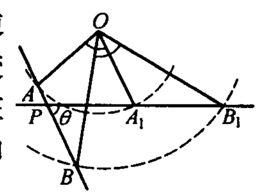


图 9.19

旋转变换在平面几何中有着广泛的应用,特别是在解(证)有关等腰三角形、正三角形、正方形等问题时,更是经常用到的思维途径.

在运用旋转变换时,应注意到如下四个方面的问题.

1. 注意旋转一个特殊角度:60°或 90°或 120°

例 1 如图 9.20,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 30°$, $\angle ADC = 60°$, $AD = DC$. 证明: $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

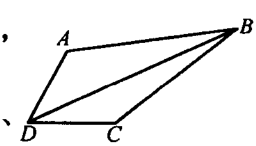


图 9.20

分析 要证 $BD^2 = AB^2 + BC^2$,想到用勾股定理. 由于 BD、AB、BC 不在一个三角形中,所以,应设法通过图形变化,使其集中在一个三角形中,且这个三角形是直角三角形.

证明 如图 9.21,联结 AC. 因为 $AD = DC$, $\angle ADC = 60°$,所以, $\triangle ADC$ 是正三角形. 于是,有

$$DC = CA = AD$$

---

① 周春荔. 神奇的旋转[J]. 中等数学,2005(6):2-5.

② 吴伯钦. "旋转变换"在平几解题中的应用[J]. 中学教研(数学),1987(3):27-29.

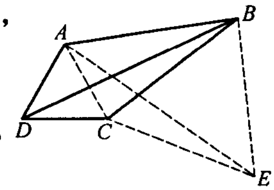


图 9.21

将$\triangle DCB$绕点C顺时针旋转$60°$到$\triangle ACE$的位置，联结EB.这时

$$DB=AE, CB=CE$$

$$\angle BCE=\angle ACE-\angle ACB=\angle BCD-\angle ACB=\angle ACD=60°$$

所以，$\triangle CBE$为正三角形.有

$$BE=BC, \angle CBE=60°$$

因此 $$\angle ABE=\angle ABC+\angle CBE=90°$$

在$Rt\triangle ABE$中，由勾股定理，得

$$AE^2=AB^2+BC^2$$

所以 $$BD^2=AB^2+BC^2$$

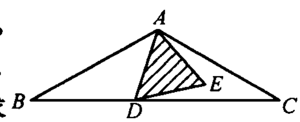


图 9.22

例 2 如图 9.22，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\triangle ADE$是正三角形，点D在边BC上.已知$BD:DC=2:3$.当$\triangle ABC$的面积是$50\ cm^2$时，求$\triangle ADE$的面积.

（第7届日本算术奥林匹克（决赛））

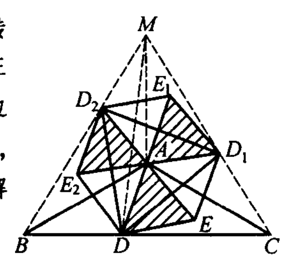


图 9.23

分析 直接解题有困难，将$\triangle ABC$绕点A逆时针旋转$120°$、$240°$拼成正$\triangle MBC$，如图 9.23 所示，则正$\triangle ADE$变为正$\triangle AD_1E_1$和正$\triangle AD_2E_2$.易知，六边形$DED_1E_1D_2E_2$是正六边形，$\triangle DD_1D_2$是正三角形，其面积是$\triangle ADE$面积的3倍.因此，设法由正$\triangle MBC$面积为150，求出$\triangle DD_1D_2$的面积，问题就解决了.

解 注意到$BD:DC=CD_1:D_1M=MD_2:D_2B=2:3$.联结$DM$，则

$$S_{\triangle MBD}=\frac{2}{5}S_{\triangle MBC}=60\ cm^2$$

而 $$S_{\triangle D_2BD}=\frac{3}{5}S_{\triangle MBD}=36\ cm^2$$

同理可得 $$S_{\triangle MD_1D_2}=S_{\triangle DCD_1}=36\ cm^2$$

因此 $$S_{\triangle DD_1D_2}=150-3\times 36=42\ cm^2$$

故 $$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{3}S_{\triangle DD_1D_2}=14\ cm^2$$

例 3 如图 9.24，在凸六边形$ABCDEF$中，$BC=CD$，$EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60°$.设$G$、$H$是这个六边形内的两点，使得$\angle BGD=\angle AHE=120°$.求

证:$BG+GD+GH+HA+HE\geqslant CF$.

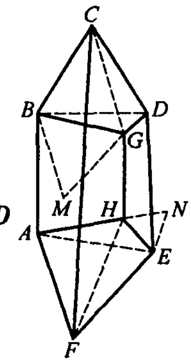


图 9.24

分析 联结 CG、FH.易得

$$CG+GH+HF\geqslant CF$$

要证 $$BG+GD+GH+HA+HE\geqslant CF$$

只须证 $$BG+GD\geqslant CG,HA+HE\geqslant HF$$

证明 联结 BD、EA.由 $BC=CD$,$\angle BCD=60°$,知$\triangle BCD$是正三角形.

因为$\angle BGD=120°$,所以,B、C、D、G四点共圆.因此

$$\angle BCG=\angle BDG$$

以点 B 为旋转中心,将$\triangle BCG$顺时针旋转 $60°$,$C\to D$,$G\to M$,$\angle BCG$ 与 $\angle BDG$ 重合,$\triangle BCG$ 落到$\triangle BDM$ 的位置,即$\triangle BCG\cong\triangle BDM$.易知$\triangle BGM$是正三角形.所以,$MG=BG$.因此

$$BG+GD=MG+GD=DM=CG \quad ①$$

同理,以点 E 为旋转中心,将$\triangle EFH$顺时针旋转 $60°$,$\triangle EFH$ 落到$\triangle EAN$的位置,即$\triangle EFH\cong\triangle EAN$.可得

$$HA+HE=HF \quad ②$$

由线段的性质得

$$CG+GH+HF\geqslant CF \quad ③$$

将式①、②代入式③得

$$BG+GD+GH+HA+HE\geqslant CF$$

2.注意中心对称变换(旋转 180°)的运用

例4 已知 M 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 BC 的中点,P、Q 分别在 AB、AC 上,且 $PM\perp QM$,求证:$PQ^2=PB^2+QC^2$.如图 9.25 所示.

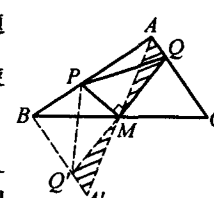


图 9.25

分析 能否使 PB、QC、PQ 构成一个直角三角形的三边是解题的关键.考虑到 $PM\perp QM$,$MA=\frac{1}{2}BC$,故以 M 为中心,把$\triangle AMQ$旋转 180°得$\triangle A'MQ'$.

证明 因 $AA'=BC$,且互相平分,则 $A'Q'\mathrel{\underline{\parallel}}AQ$,$A'B\perp AB$,且 Q'在 $A'B$ 上,联结 PQ',又 $PM\perp QQ'$,$MQ=MQ'$,则 $PQ'=PQ$,又 $BQ'=CQ$,故在 $Rt\triangle PBQ'$中有

$$PQ'^2=PB^2+Q'B^2$$

即 $$PQ^2=PB^2+QC^2$$

3.旋转时也可以旋某定角

例5　在$\triangle ABC$中,已知$\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

(安徽省桐城中学数学竞赛试题)

证明　如图9.26,设$\angle C=\theta$,则$\angle B=2\theta$,$\angle A=4\theta$,且$7\theta=180°$,把$\triangle ACB$绕点C按顺时针方向旋转定角θ到$\triangle MCN$的位置,联结AM,则$CM=CA=b$,C、A、N三点共线,则

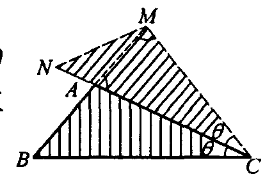


图9.26

$$\angle CAM=\angle CMA=3\theta$$

$$\angle BAC+\angle CAM=7\theta=180°$$

故B、A、M三点共线.于是

$$MB=MC=b,AM=b-c$$

易得$\triangle AMN\backsim\triangle ACB$,则$\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{CB}$,即$\frac{b-c}{b}=\frac{c}{a}$,整理即得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

例6　四边形$ABCD$内接于圆,另一圆圆心在边AB上且与其余三边相切,求证:$AD+BC=AB$.

(1985年第26届IMO试题)

证明　设圆O切三边于E、F、G,联结OD、OF、OG.

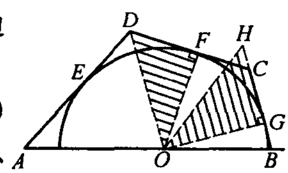


图9.27

把$\triangle DOF$绕点O按顺时针方向旋转定角($\angle FOD$)到$\triangle HOG$的位置.设

$$\angle H=\angle ODF=\angle ODA=\theta$$

则

$$\angle B=180°-2\theta,\angle HOG=90°-\theta$$

$$\angle GOB=90°-\angle B=2\theta-90°$$

则

$$\angle HOB=(90°-\theta)+(2\theta-90°)=\theta$$

即

$$OB=BH=BG+GH=BG+DF=BG+DE \quad ①$$

同理可证

$$AO=AE+GC \quad ②$$

①+②,即得

$$AB=AD+BC$$

即 $$AD + BC = AB$$

4. 注意位似旋转变换的运用

例 7 如图 9.28,在任意凸四边形 $ABCD$ 中,求证:$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

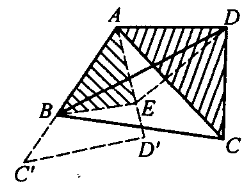


图 9.28

分析 考虑

$$AC \cdot BD \leqslant AC(BE + ED) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

使得 $$AC \cdot BE = AB \cdot CD, AC \cdot DE = BC \cdot AD$$

成立的这样的点 E 是否存在? 由 $AC \cdot BE = AB \cdot CD$,得 $\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC}$,能否找到 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$.

证明 以 A 为中心,先把 $\triangle ACD$ 顺时针方向旋转 $\angle BAC$ 得 $\triangle AC'D'$,再以定比 $k = \frac{AB}{AC}$ 为位似比,变换成 $\triangle ABE$,联结 ED,则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$,且 $\triangle AED \backsim \triangle ABC$(两边对应成比例,夹角相等),则 $\frac{BE}{AB} = \frac{DC}{AC}$,即

$$BE \cdot AC = DC \cdot AB$$

同理可得 $$DE \cdot AC = BC \cdot AD$$

两式相加得 $$AC(BE + DE) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

又 $$BE + DE \geqslant BD$$

故 $$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

当 E 在 BD 上时,$ABCD$ 是圆内接四边形,上式取等号.

第 2 节 角元形式塞瓦定理的推论的推广及应用[①]

角元形式塞瓦定理的推论 设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆三段弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 上的点,则 AD、BE、CF 共点的充要条件是

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad ①$$

在上述推论题设下,显然有

$$\angle BDC + \angle CEA + \angle AFB = 360^\circ \quad ②$$

$$\angle EDF = \angle ECA + \angle ABF, \angle FED = \angle FAB + \angle BCD, \angle DFE = \angle DBC + \angle CAE \quad ③$$

① 沈文选.关于两个著名定理联系的探讨[J].中学数学,2006(10):44-46.

$$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AC}{CE}=1,\frac{FE}{ED}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BA}{AF}=1,\frac{DF}{FE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CB}{BD}=1 \quad ④$$

如果将上述角看做是有向角,上述推论可推广为下述结论.

定理①　在任意$\triangle ABC$ 的三边上作$\triangle BDC$、$\triangle CEA$、$\triangle AEB$,若

(i)$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$;

(ii)$\angle BDC+\angle CEA+\angle AFB=360°$.

则有

$$\angle EDF=\angle ECA+\angle ABF$$

$$\angle FED=\angle FAB+\angle BCD$$

$$\angle DFE=\angle DBC+\angle CAE$$

$$\frac{ED}{DF}=\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AB}{BF},\quad \frac{FE}{ED}=\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BC}{CD},\quad \frac{DF}{FE}=\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CA}{AE}$$

其中,三角形可以是退化的.

证明　以$\triangle ABC$ 的三边作的三个三角形$\triangle BDC$、$\triangle CEA$、$\triangle AFB$ 的情形有四种:三个都向$\triangle ABC$ 的形外;三个都向形内、一个向形内;两个向形内;两个向形内、一个向形外.下面仅就图 9.29(a)、(b)所代表的两种情形给出证明,其余两种情形可类似证明.

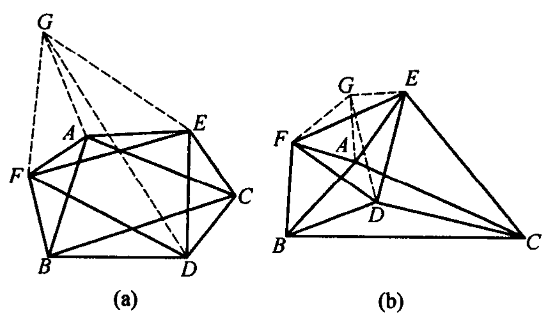


图 9.29

作$\triangle AGF$ 同向相似于$\triangle BDF$,联结 GD、GE,则

$$FG:FA=FD:FB$$

$$\angle GFA=\angle DFB,\angle FAG=\angle FBD$$

由此易知

$$\triangle GFD\backsim\triangle AFB$$

所以

$$\angle GDF=\angle ABF \quad ①$$

① 肖振纲.涉及四个三角形的一个几何定理[J].中学数学,1991(5):12-14.

另一方面,由$\triangle AGF \backsim \triangle BDF$,有

$$AG:AF=BD:BF$$

于是条件(i)即得

$$\frac{AG}{AE}=\frac{AG}{AF}\cdot\frac{AF}{AE}=\frac{BD}{BF}\cdot\frac{AF}{AE}=\frac{DC}{CE}$$

又由条件(ii)及六边形的内角和公式,得

$$\angle EAF+\angle FBD+\angle DCE=360°$$

再由$\angle EAF+\angle FAG+\angle GAE=360°$及$\angle FAG=\angle FBD$得$\angle GAE=\angle DCE$,因而$\triangle AEG \backsim \triangle CED$,所以 $GE:AE=DE:CE$ 且$\angle GEA=\angle DEC$.由此易知$\triangle GED \backsim \triangle CEA$,从而

$$\angle EDG=\angle ECA \qquad ②$$

由①、②即知

$$\angle EDF=\angle EDG+\angle GDF=\angle ECA+\angle ABF$$

且由 $\triangle DGF \backsim \triangle DAF,\triangle GED \backsim \triangle CEA$

得 $$\frac{ED}{DF}=\frac{ED}{DG}\cdot\frac{DG}{DF}=\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AB}{BF}$$

同理可证其余几个关系式,证毕.

下面的一些例子说明上述定理在确定三角形形状、三点共线等问题方面的应用,这些例子中,有的是难度较大的竞赛试题,有的是历史上著名的定理.

例 1 在任意$\triangle ABC$的边上向外作$\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$,使$\angle PBC=\angle CAQ=45°$,$\angle BCP=\angle QCA=30°$,$\angle ABR=\angle BAR=15°$.求证:(1)$\angle QRP=90°$;(2)$QR=RP$.

(1975 年第 17 届 IMO 试题)

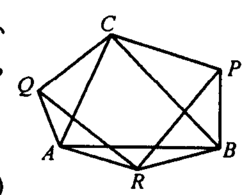


图 9.30

证明 如图 9.30,由题设条件易知

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

且 $$\angle BPC+\angle CQA+\angle ARB=105°+105°+150°=360°$$

由定理即知 $$\angle QRP=\angle QAC+\angle CBP=45°+45°=90°$$

且 $$\frac{QR}{RP}=\frac{QC}{CA}\cdot\frac{BC}{PB}=1$$

即 $QR=RP$.证毕.

例 2 如图 9.31,$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是两个不全等的等腰直角三角形,现固定$\triangle ABC$,而将$\triangle ADE$绕点 A 在平面上旋转.试证:不论$\triangle ADE$旋转到什么位

置,线段 EC 上必存在一点 M,使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

(1987年全国高中联赛试题)

证明　因 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 不全等,所以不论 $\triangle ADE$ 在平面上绕点 A 旋转到什么位置,线段 BD 与 CE 都不等于零.

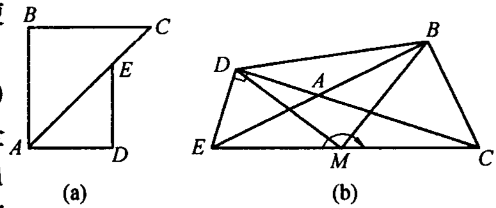


图9.31

设 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转到任意一个固定的位置,如图9.31(b)所示,取线段 CE 之中点 M,则因

$$\frac{EM}{MC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AD}{DE}=1$$

且 $$\angle EMC+\angle CBA+\angle ADE=180^\circ+90^\circ+90^\circ=360^\circ$$

由定理即知 $$\angle BMD=\angle BCA+\angle AED=45^\circ+45^\circ=90^\circ$$

且 $$\frac{BM}{MD}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AE}{DE}=1$$

即 $BM=MD$.这说明 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形,证毕.

例3　在一任意 $\triangle ABC$ 的三边上向形外作三个正三角形 BDC、CEA、AFB.证明,这三个正三角形的中心也构成一个正三角形.(拿破仑(Napolen)定理)

证明　如图9.32,设这三个正三角形的中心分别为 P、Q、R.联结 AQ、AR、BR、BP、CP、CQ,显然 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$ 都是顶角为 120° 的等腰三角形,因而有

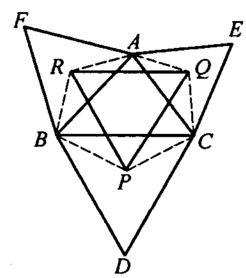


图9.32

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

且 $$\angle BPC+\angle CQA+\angle ARB=360^\circ$$

由定理即知

$$\angle QPR=\angle QCA+\angle ABR=30^\circ+30^\circ=60^\circ$$

且 $$\frac{QR}{PR}\cdot\frac{QC}{CA}\cdot\frac{AB}{BR}=1$$

即 $QP=PR$.故 $\triangle PQR$ 是一个正三角形,证毕.

例4　证明:圆内接六边形三双对边(所在直线)的交点共线.(巴斯卡(Pascal)定理)

证明　如图9.33,设圆内接六边形 $AA'BB'CC'$ 三双对边(所在直线)的交点分

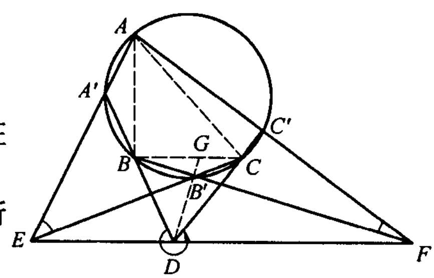


图9.33

别为 D、E、F，由圆外角定理，有

$$\angle CDB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'AA'} - \overset{\frown}{BB'C})$$

$$\angle CEA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CC'A} - \overset{\frown}{A'BB'})$$

$$\angle AFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AA'B} - \overset{\frown}{B'CC'})$$

于是
$$\angle CDB - \angle CEA - \angle AFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'AA'} + \overset{\frown}{A'BB'} + \overset{\frown}{B'CC'}) - \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BB'C} + \overset{\frown}{CC'A} + AA'B) = 0$$

所以
$$\angle CDB = \angle CEA + \angle AFB$$

联结 AB、BC、CA，则有

$$\angle DBC = \angle EAC, \angle BCD = \angle BAF$$

因而在线段 BC 上存在一点 G，使

$$\triangle CEA \backsim \triangle GDB, \triangle AFB \backsim \triangle CDG$$

于是
$$CE : EA = GD : BD, AF : FB = DC : GD$$

因而有
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{GD}{BD} \cdot \frac{DC}{GD} = 1$$

另一方面，因

$$\angle CDB = \angle CEA + \angle AFB$$

于是按方向角计算，便有

$$\angle BDC + \angle CEA + \angle AFB = 360°$$

由定理立即可得

$$\angle EDF = \angle ECA + \angle ABF = 180°$$

($ABB'C$ 为圆内接四边形)，故 D、E、F 三点共线，证毕.

例 5 如图 9.34，$ABCD$、$PQRS$、$DQEF$、$CSGH$ 都是正方形，其中点 P 在 AB 上，且 $PR \perp AB$，$PR = \frac{1}{2}AB$. 求证：E、R、Q 三点共线，且 R 是 EG 的中点.

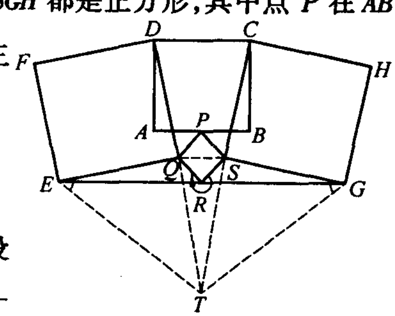


图 9.34

证明 联结 QS，则

$$QS = PR = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$$

于是，DQ 的延长线与 CS 的延长线必相交，设交点为 T，再联结 ET、GT，因 $PR \perp AB$，$QS \perp PR$，且 $QS = \frac{1}{2}DC$，由此即知 $QT = DQ$，$ST =$

CS,从而可知$\triangle QET$与$\triangle TGS$皆为等腰直角三角形,且分别以 Q、S 为直角顶点,又$\triangle SRQ$也是一个等腰直角三角形,且以 R 为直角顶点.

考虑在$\triangle TSQ$的三边上所作的三个等腰直角三角形:$\triangle SRQ$、$\triangle QET$、$\triangle TGS$,显然有

$$\frac{SR}{RQ}\cdot\frac{QE}{ET}\cdot\frac{TG}{GS}=1$$

且按方向角计算,有

$$\angle SRQ+\angle QET+\angle TGS=270°+45°+45°=360°$$

由定理即知 $$\angle GRE=\angle GST+\angle TQE=90°+90°=180°$$

因此 E、R、G 三点共组,且有

$$\frac{ER}{RG}=\frac{EQ}{QT}\cdot\frac{TS}{SG}=1$$

即 $ER=RG$.这说明 R 是 EG 的中点,证毕.

最后指出,在定理中,若$\triangle BDC$、$\triangle CEA$、$\triangle AFB$都是退化的,即 D、E、F 分别位于 BC、CA、AB(所在直线)上时,如图 9.35(a)、(b)所示,则有

$$\angle EDF=\angle ECA+\angle ABF=0+0=0$$

这说明 D、E、F 是共线的,因此有:

推论　设 D、E、F 分别为$\triangle ABC$的三边 BC、CA、AB(所在直线)上的三点,若

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

且 $\angle BDC+\angle CEA+\angle AFB=360°$

则 D、E、F 三点共线.

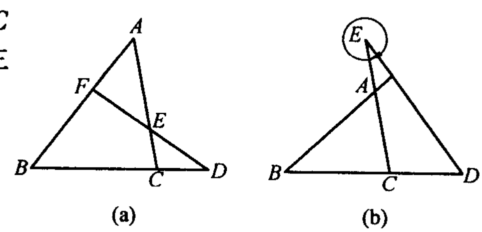


图 9.35

此推论实际上是平面几何中证明三点共线的一个十分得力的工具——梅涅劳斯定理.由此可见,本节所证定理给出了梅涅劳斯定理的一个较为深刻的推广.

第 3 节　直角三角形中的几个问题

直角三角形中有一系列的数量关系①②.这里,我们再给出直角三角形中的几个有趣问题.

① 沈文选.直角三角形中的一些数量关系[J].中学数学,1997(7):14-17.
② 沈文选.平面几何证明方法全书[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005:351-359.

命题 1① 如图 9.36,$\triangle ABC$ 中,$CD\perp AB$ 于 D,$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r;$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle BCD$ 的内心分别为 I、I_1、I_2,$\triangle II_1I_2$ 的外接圆半径为 R_0,则$\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件是 $R_0=r$.

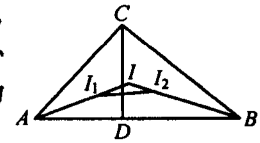


图 9.36

证明 必要性:设$\triangle ADC$、$\triangle BCD$ 的内切圆半径分别为 r_1、r_2,$\angle ACB=90°$,则

$$\angle AIB=90°+\frac{1}{2}\angle ACB=135°$$

又
$$I_1I_2=\sqrt{DI_1^2+DI_2^2}=\sqrt{2(r_1^2+r_2^2)}$$

可推知,当$\angle ACB=90°$时,$r_1^2+r_2^2=r^2$,则

$$I_1I_2=\sqrt{2}r,2R_0=\frac{\sqrt{2}r}{\sin 135°}$$

故
$$R_0=r$$

充分性:作 $IK\perp AB$ 于 K,$I_1M\perp AB$ 于 M,$I_2N\perp AB$ 于 N,则

$$AK=\frac{1}{2}(AB+AC-BC),AM=\frac{1}{2}(AD+AC-DC)$$

则
$$MK=\frac{1}{2}(BD+DC-BC)=r_2=I_2N$$

同理
$$KN=r_1=I_1M$$

又
$$\angle I_1MK=\angle KNI_2=90°$$

则
$$\triangle I_1MK\cong\triangle KNI_2$$

即
$$I_1K=KI_2,\angle I_1KM=\angle KI_2N$$

从而
$$\angle I_1KM+\angle I_2KN=\angle I_2KN+\angle KI_2N=90°$$

故
$$\angle I_1KI_2=90°$$

由 $KI_1=KI_2$ 知 K 在 I_1I_2 的中垂线上,又 $I_1K=r$,由$\triangle II_1I_2$ 的外接圆半径 $R_0=r$,设外心为 K'.则

$$IK'=r$$

由
$$\angle AIB=90°+\frac{1}{2}\angle ACB>90°$$

则 K、K'都在$\angle AIB$ 内.

因 K'亦在 I_1I_2 的中垂线上,且 $IK=IK'=r$,则 K 与 K'重合.即

$$\angle AIB+\frac{1}{2}\angle I_1KI_2=180°$$

① 邹黎明,唐建忠.直角三角形的一个性质[J].中学数学,2003(5):49.

从而
$$\angle AIB = 135^\circ$$
又由
$$\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB = 135^\circ$$
故
$$\angle ACB = 90^\circ$$

命题 2① $\triangle ABC$ 中，$CD \perp AB$ 于 D，$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的内切圆分别切 AC、BC 于 E、F，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件 $\angle EDF = 90^\circ$.

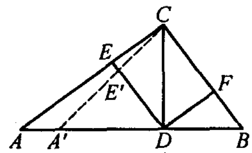


图 9.37

证明　必要性：因为 $\angle ACB = 90$，$CD \perp AB$，所以，$\triangle ACD \backsim \triangle CDB$，所以
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AC + AD - CD}{BC + CD - BD}$$
因为
$$AE = \frac{1}{2}(AC + AD - CD),\ CF = \frac{1}{2}(CD + BC - BD)$$
所以
$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{CD}$$
又 $\angle A = \angle DCB$，所以
$$\triangle ADE \backsim \triangle CDF$$
所以
$$\angle ADE = \angle CDF$$
所以
$$\angle EDF = \angle ADC = 90^\circ$$

充分性：在 $\angle EDF = 90^\circ$ 的条件下，假设 $\angle ACB \neq 90^\circ$，设 $\triangle ACD$ 内心为 I_1，联结 I_1E，过 C 作 $A'C \perp BC$，设 CA' 交 AB 于 A'，作 $\triangle A'CD$ 的内切圆圆 I_1' 切 $A'C$ 于 E'，联结 $I_1'E'$.

由前知 $\angle E'DF = 90^\circ$，因为 $\angle EDF = 90^\circ$，所以 D、E、E' 在一条直线上.

又 D、I_1、I_1' 在一条直线上，则
$$DI_1 = \sqrt{2}I_1E,\ DI_1' = \sqrt{2}I_1'E'$$
在 $\triangle I_1DE$ 中，设 $\angle I_1DE = \alpha$，所以
$$\frac{I_1E}{\sin\alpha} = \frac{I_1D}{\sin\angle I_1ED},\ \frac{I_1'E'}{\sin\alpha} = \frac{I_1'D}{\sin\angle I_1'E'D}$$
因为
$$\frac{I_1E}{I_1E'} = \frac{DI_1}{DI_1'}$$
所以
$$\sin\angle I_1ED = \sin\angle I_1'E'D$$
又
$$\angle EI_1D = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \angle A = 225^\circ - \angle A > 90^\circ$$

① 邹黎明. 数学问题 1591 题[J]. 数学通报，2006(2).

又 $$\angle E'I'D > 90°$$

所以 $$\angle I_1ED = \angle I_1'E'D$$

所以 $I_1E /\!/ I_1E'$，又 $I_1E \perp AC$，$I_1'E' \perp A'C$，所以 $CA' \perp I_1E$.

矛盾，所以假设不成立，所以$\angle ACB = 90°$.

命题 3[①] $\triangle ABC$ 为直角三角形的充分与必要条件为：$\triangle ABC$ 可以被分成两个彼此无公共内点且都与$\triangle ABC$ 相似的小三角形.

证明 必要性：设$\angle C = 90°$，则由 C 引边 AB 上的高，就把$\triangle ABC$ 分成了两个与$\triangle ABC$ 相似且彼此无公共内点的三角形.

充分性：设$\triangle ABC$ 被直线 PQ 分成了两个彼此无公共内点且都与$\triangle ABC$ 相似的小三角形，我们要证$\triangle ABC$ 是直角三角形.

首先，直线 PQ 必过$\triangle ABC$ 的一个顶点(不妨设为点 C)，否则$\triangle ABC$ 将被分成一个三角形及一个四边形，由题设知$\triangle BDC \backsim \triangle ADC \backsim \triangle ABC$，因为$\angle ADC > \angle DBC$，$\angle ADC > \angle DCB$，所以由上式推出只能有$\angle ADC = \angle BDC$，亦即 $CD \perp AB$，再根据上式知$\angle C = 90°$，即$\triangle ABC$ 是直角三角形.

命题 4[②] 在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边上的高，记 I_1、I_2、I 分别是$\triangle ADC$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的内心，I 在 AB 上的射影为 O_1，$\angle CAB$、$\angle ABC$ 的平分线分别交 BC、AC 于 P、Q，PQ 与 CD 相交于 O_2. 求证：四边形 $I_1O_1I_2O_2$ 为正方形.

证明 如图 9.38，不妨设 $BC \geqslant AC$. 由题设，有

$$\text{Rt}\triangle ADC \backsim \text{Rt}\triangle CDB$$

所以 $$\frac{AC}{BC} = \frac{I_1D}{I_2D}$$

又 $$\angle I_1DI_2 = 90° = \angle ACB$$

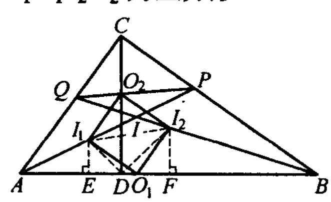


图 9.38

从而

$$\text{Rt}\triangle DI_1I_2 \backsim \text{Rt}\triangle CAB, \angle I_2I_1B = \angle CAB \quad ①$$

记$\triangle ADC$、$\triangle BCD$ 内切圆半径分别为 r_1、r_2；$AB = c$，$BC = a$，$CA = b$，$AD = x$，$BD = y$，$CD = z$，则

$$r_1 = \frac{x+z-b}{2}, r_2 = \frac{y+z-a}{2}, AO_1 = \frac{b+c-a}{2}$$

(注意 O_1 为$\triangle ABC$ 内切圆在 AB 上的切点)，从而

$$DO_1 = AO_1 - AD = \frac{b+c-a}{2} - x = r_2 - r_1$$

---

① 南秀全. 三角形的剖分及应用[J]. 中学数学，1992(3)：44-47.

② 羊明亮，沈文选. 数学问题 666 题[J]. 数学教学，2006(4)：48.

$$EO_1 = r_1 + (r_2 - r_1) = r_2, FO_1 = r_1$$

由勾股定理,有

$$I_1O_1^2 = I_1E_1^2 + O_1E^2 = r_1^2 + r_2^2$$

同理　$$I_2O_1^2 = r_1^2 + r_2^2$$

又　$$I_1I_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + (r_2 + r_1)^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) = I_1D^2 + I_2D^2$$

所以$\triangle O_1I_1I_2$为等腰直角三角形,且D、O_1、I_2、I_1四点共圆,则

$$\angle I_2O_1B = \angle I_2I_1D \quad ②$$

由①、②可知

$$\angle I_2O_1B = \angle CAB, O_1I_2 /\!/ AC$$

同理$O_1I_1 /\!/ BC$,所以

$$\frac{AI_1}{I_1P} = \frac{AO_1}{BO_1} = \frac{\frac{1}{2}(b+c-a)}{\frac{1}{2}(c+a-b)} = \frac{b+c-a}{c+a-b}$$

由角平分线定理,有

$$CP = \frac{ab}{b+c}, CQ = \frac{ab}{a+c}$$

另一方面

$$\frac{QO_2}{O_2P} = \frac{S_{\triangle CQO_2}}{S_{\triangle CPO_2}} = \frac{\frac{1}{2}CQ \cdot CO_2 \sin\angle ACD}{\frac{1}{2}CP \cdot CO_2 \sin\angle BCD} = \frac{b(b+c)}{a(a+c)}$$

因此　$$O_2I_1 /\!/ CA \Leftrightarrow \frac{AI_1}{I_1P} = \frac{QO_2}{O_2P} \Leftrightarrow \frac{b+c-a}{c+a-b} = \frac{b(b+c)}{a(a+c)}$$

因为　$$a(a+c)(b+c-a) - b(b+c)(c+a-b) =$$
$$a^2b - a^3 + ac^2 - ab^2 + b^3 - bc^2 =$$
$$a^2b - a^3 + a(a^2+b^2) - ab^2 + b^3 - b(a^2+b^2) = 0$$

故$O_2I_1 /\!/ CA$.同理$O_2I_2 /\!/ BC$,四边形$I_1O_1I_2O_2$为平行四边形,又

$$I_1O_1 = I_2O_1, I_1O_1 \perp I_2O_1$$

故四边形$I_1O_1I_2O_2$为正方形.

命题5① 在Rt$\triangle ABC$中,CD为斜边AB上的高,I_1、I_2分别为$\triangle ACD$和$\triangle CDB$的内心,过I_1、I_2的直线交AC于E,交BC于F;延长CI_1交AD于P,延长CI_2交DB于Q;设I为$\triangle ABC$的内心,则

① 田永海.由一个简单图形构造的若干命题[J].中学数学月刊,1988(11):16-18.

(1)$\angle PCQ=45°$;

(2)$AQ=AC, BP=BC$;

(3)$CE=CD=CF$,且 $EI_1^2+I_2F^2=I_1I_2^2$;

(4)三直线 PI_2、QI_1、CD 共点;

(5)$CI\perp I_1I_2$,且 $CI=I_1I_2$;

(6)$\angle PIQ=90°$.

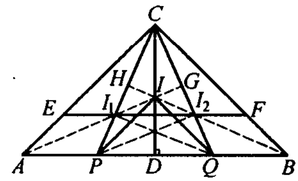


图 9.39

证明 (1)$\angle PCQ=\frac{1}{2}\angle ACD+\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$.

(2)由$\angle ACQ=\angle ACD+\frac{1}{2}\angle DCB=\angle B+\frac{1}{2}\angle DCB=\angle AQC$ 知

$$AQ=AC$$

同理

$$BP=BC$$

(3)由 Rt$\triangle ADC\backsim$Rt$\triangle CDB$,有

$$\frac{DI_1}{DI_2}=\frac{AC}{BC}$$

又

$$\angle I_1DI_2=\frac{1}{2}\angle ADB=90°=\angle ACB$$

则$\triangle I_1DI_2\backsim\triangle ACB$,即$\angle I_2I_1D=\angle A$,故 E、A、D、I_1 共圆.则

$$\angle CEI_1=\angle ADI_1=\angle CDI_1=45°$$

于是

$$EI_1=DI_1, I_2F=DI, \triangle CEI_1\cong\triangle CDI_1$$

即 $CE=CD$,$EI_1=DI_1$,同理 $CF=CD$,$I_2F=DI$.

在 Rt$\triangle I_1DI_2$ 中有

$$I_1D^2+I_2D^2=I_1I_2^2$$

由此即证得

$$EI_1^2+I_2F^2=I_1I_2^2$$

(4)由 $AQ=AC$,及 I_1 在$\angle A$ 的平分线上,则 I_1 在 CQ 的中垂线上,即 $CI_1=I_1Q$,又$\angle PCQ=45°$,则$\angle CI_1Q=90°$.同理$\angle CI_2P=90°$.故 PI_2 与 QI_1 相交于$\triangle CPQ$ 的垂心,而 $CD\perp PQ$,故 CD 过此垂心,即三直线 PI_2、QI_1、CD 共点.

(5)联结 AI、BI,易知 I_1、I_2 分别在 AI、BI 上,且有 $AI\perp CQ$,$BI\perp PC$.即 I 为$\triangle CI_1I_2$ 的垂心,得 $CI\perp I_1I_2$.

又$\angle I_1CI_2=45°$,设 I_1I 交 CI_2 于 G,有 $CG=I_1G$,则

$$\text{Rt}\triangle CIG\cong\text{Rt}\triangle I_1I_2G$$

故

$$CI=I_1I_2$$

(6)延长 AI 交 CQ 于 G,延长 BI 交 CP 于 H,则 I_1、I_2 分别在 AG、BH 上.

由 $AC = AQ$, $BC = BP$,可知 AG 为 QC 的中垂线,BH 为 CP 的中垂线,有 $IQ = IC$, $IP = IC$,即 $IP = IQ = IC$.故 I 为△CPQ 的外心,于是

$$\angle PIQ = 2\angle PCQ = \angle ACB = 90°$$

即

$$\angle PIQ = 90°$$

命题 6　在 Rt△ABC 中,$CD \perp$ 斜边 AB 于 D,O_1、O_2 分别为△ACD、△CDB 的内心,过 O_1、O_2 的直线交 AC 于 E,交 CD 于 K,交 CB 于 F,交直线 AB 于 G,过 C 作△ABC 的外接圆的切线交直线 BA 于 T,$\angle CTB$ 的平分线交 AC 于 R,交 BC 于 R,则

(1) $\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{KC}$.

(2) $\dfrac{BG}{AG} = \dfrac{FB}{EA}$.

(3) $RS /\!/ O_1O_2$.

证明　(1)如图 9.40,由性质 3 得

$$CE = CD = CF$$

设 $\angle BCD = \alpha$,则

$$\frac{\sin 90°}{CK} = \frac{\sin \alpha}{CE} + \frac{\sin(90° - \alpha)}{CF}$$

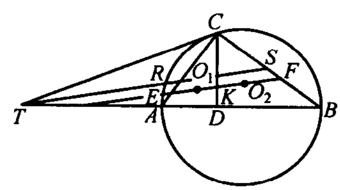


图 9.40

易知

$$\sin \alpha = \sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{AC}$$

$$\sin(90° - \alpha) = \sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{CF}{BC}$$

则

$$\frac{1}{CK} = \frac{\sin 90°}{CK} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$$

即

$$\frac{1}{CK} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$$

(2)过 A 作 BC 的平行线交 GE 于 H,由 $CE = CF$ 知 $HA = EA$,有

$$\frac{BG}{AG} = \frac{FB}{HA} = \frac{FB}{EA}$$

故

$$\frac{BG}{AG} = \frac{FB}{EA}$$

(3)由 $\angle CEF = 45°$,易知 R 为 Rt△TDC 的内心,有

$$\angle CRS = \angle CTR + \angle TCR = \frac{1}{2}(\angle CTD + \angle TCD) = 45° = \angle CEF$$

即

$$\angle CRS = \angle CEF$$

故

$$RS /\!/ O_1O_2$$

第10章　1988～1989年度试题的诠释

试题A　如图10.1,在$\triangle ABC$中,P、Q、R将其周长三等分,且P、Q在边AB上,求证:$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.

证法1　不妨设周长为1,作$\triangle ABC$、$\triangle PQR$的高CL、RH.则

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot RH}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CL}=\frac{PQ\cdot AR}{AB\cdot AC}$$

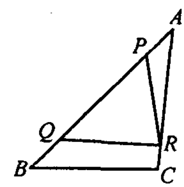


图10.1

由$PQ=\frac{1}{3}$,$AB<\frac{1}{2}$,知$\frac{PQ}{AB}>\frac{2}{3}$.又

$$AP\leqslant AP+BQ=AB-PQ<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$AR=\frac{1}{3}-AP>\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

且
$$AC<\frac{1}{2}$$

从而
$$\frac{AR}{AC}>\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

则
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

证法2　在AB上取点Q',如图10.2所示,使$AQ'=PQ$,则

$$AQ'=PQ=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)>\frac{1}{3}(AB+AB)=\frac{2}{3}AB$$

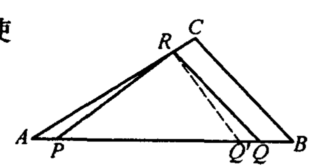


图10.2

且
$$AP<AB-PQ<\frac{1}{3}AB$$

于是
$$AR=(AP+AR)-AP=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-AP>$$
$$\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-\frac{1}{3}AB>\frac{1}{3}AC$$

故
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AQ'\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}>\frac{\frac{1}{3}AC\cdot\frac{2}{3}AB}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}$$

证法 3　如图 10.3，将$\triangle ABC$进行三次剖分，则图中 9 个小三角形都全等，显然有：

(i) $PQ=\frac{1}{3}m=m_1>2AC_1=\frac{2}{3}AB$，其中 m、m_1 分别表示$\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$的周长. 因此，必须有 P 在 AC_1 上，Q 在 BC_2 上.

(ii) R 不在 AB(或 BA_1)上，否则
$$PA+AR\leqslant C_1A+AB_1\leqslant m_1=\frac{1}{3}m$$
因此，R 必在 B_1C(或 A_1C)上. 故
$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}PQ\cdot h'>\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}AB\right)\cdot\left(\frac{1}{3}h\right)=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$$
其中，h、h'分别表示$\triangle ABC$、$\triangle PQR$相应边上的高.

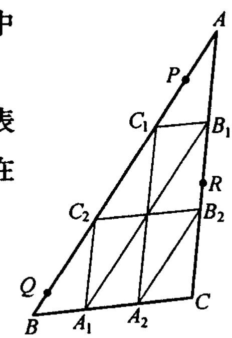


图 10.3

证法 4　(由天津一中刘智给出)如图 10.4，设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，由 P、Q、R 将周长三等分，知
$$PQ=\frac{a+b+c}{3}$$
则
$$AP\leqslant AB-PQ=c-\frac{a+b+c}{3}=\frac{2c-a-b}{3}$$
又
$$PA+AR=\frac{a+b+c}{3}$$
则
$$AR\geqslant\frac{a+b+c}{3}-\frac{2c-a-b}{3}=\frac{2a+2b-c}{3}$$
从点 R、C 分别作 AB 的高线 h'、h，如图 10.4 所示. 则
$$\frac{h'}{h}=\frac{AR}{AC}\geqslant\frac{2a+2b-c}{3b}$$

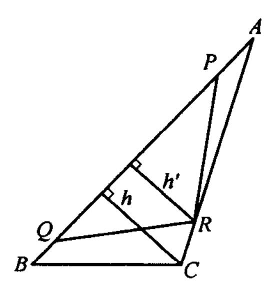


图 10.4

又 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}PQ\cdot h'}{\frac{1}{2}AB\cdot h}\geqslant\frac{a+b+c}{3c}\cdot\frac{2a+2b-c}{3b}=\frac{(a+b+c)(2a+2b-c)}{9bc}$

而 $$\frac{(a+b+c)(2a+2b-c)}{9bc}=\frac{2(a+b)^2+ac-c^2-bc}{9bc}+\frac{2}{9}$$

因 $a+b>c$,则$(a+b)^2>c^2$,又由

$$c^2+ac=c(a+c)>cb$$

知 $$2(a+b)^2+ac+c^2-bc>0$$

则 $$\frac{(a+b+c)(2a+2b-c)}{9bc}>\frac{2}{9}$$

从而 $$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$$

证法 5 (此证法及后 2 种证法由马传渔教授等给出)设 $BC=a,AB=c,AC=b,AP=x,BQ=y,CR=z,PQ=l$,则△$ABC$ 的周长

$$p=a+b+c=3l$$

$$S_{\triangle AQR}=\frac{1}{2}(l+x)(l-x)\sin A,S_{\triangle APR}=\frac{1}{2}(l-x)x\sin A$$

故 $$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}l(l-x)\sin A$$

又 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(l+x+y)(l-x+z)\sin A$$

从而 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{l(l-x)}{(l+x+y)(l-x+z)}\geqslant\frac{l(l-x)}{\left[\frac{(l+x+y)+(l-x+z)}{2}\right]^2}=$

$$\frac{4l(l-x)}{(2l+y+z)^2}$$

因为 $y+z<l,x+l<c<\frac{3}{2}l$,故 $x<\frac{l}{2}$.于是 $l-x>\frac{l}{2}$.最后

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{4l(l-x)}{(2l+y+z)^2}>\frac{2l^2}{(3l)^2}=\frac{2}{9}$$

证毕.

证法 6 在证法 1 中,当 x 取最大值时,λ 取最小.依题意得 $x=c-l$.于是

$$\lambda=\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant\frac{l(2l-c)}{bc}=\frac{2(a+b)^2+(a+b)c-c^2}{9bc}$$

因为
$$(a+b)c>c^2,(a+b)c>bc$$

故
$$\lambda>\frac{2bc}{9bc}=\frac{2}{9}$$

证毕.

证法 7　如图 10.5,以 AB 所在直线及过点 C 且与 AB 垂直的直线为坐标轴,建立坐标系,并在图中表出各点的坐标,这里 $x_0>0,h>0,c>0$.

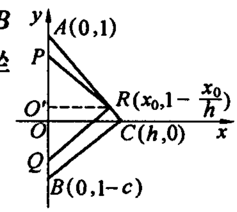


图 10.5

因为直线 $AC:\frac{x}{h}+y=1$,故

$$R(x_0,1-\frac{x_0}{h})$$

$$AB=c,BC=\sqrt{h^2+(1-c)^2},AC=\sqrt{h^2+1}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}hc$$

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}x_0\cdot\frac{1}{3}[c+\sqrt{h^2+(1-c)^2}+\sqrt{h^2+1}]$$

欲证式即为

$$x_0[c+\sqrt{h^2+(1-c)^2}+\sqrt{h^2+1}]>\frac{2}{3}hc \qquad (*)$$

由题设,并参照证法 3,当点 Q 与点 B 重合时

$$AP=c-l,AR=l-AP=2l-c>b/3$$

即 $x_0>h/3$.此外

$$\sqrt{h^2+(1-c)^2}>BO,\sqrt{h^2+1}>AO$$

故
$$\frac{2c}{c+\sqrt{h^2+(1-c)^2}+\sqrt{h^2+1}}<1<\frac{x_0}{h/3}$$

从而(*)成立,证毕.

证法 8　取坐标系如图 10.6,设△ABC 的三边长为 a、b、c,各点的坐标为:$A(0,0)$、$P(p,0)$、$Q(q,0)$、$B(c,0)$、$C(x_c,y_c)$、$R(x_R,y_R)$.由题设

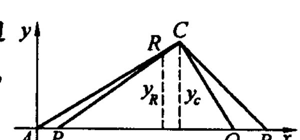


图 10.6

$$PQ=q-p=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$AR=PQ-AP=q-p-p=q-2p$$

又
$$\frac{y_R}{y_C}=\frac{AR}{AC}=\frac{q-2p}{b}$$

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & p & 0\\ 1 & q & 0\\ 1 & x_R & y_R\end{vmatrix}=\frac{1}{2}y_R(q-p)$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & c & 0\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}=\frac{1}{2}cy_C$$

所以
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{y_R(q-p)}{cy_C}=\frac{(q-2p)(q-p)}{bc}$$

而
$$q<c<\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}(q-p)$$

所以
$$3p<q$$

即
$$q-2p>\frac{1}{2}(q-p)$$

所以
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(q-p)^2}{2bc}=\frac{2}{9}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{4bc}>\frac{2}{9}\cdot\frac{(b+c)^2}{4bc}\geqslant\frac{2}{9}$$

注 (1)题中的$\frac{2}{9}$是最佳的. 例如,取一个周长为 1 的$\triangle ABC$,且 $AB=AC$,令 Q 与 B 重合,如图 10.7 所示. 当 $BC\to 0$ 时

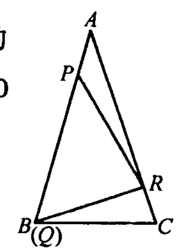


图 10.7

$$AB=AC\to\frac{1}{2},BP=\frac{1}{3},AP\to\frac{1}{6}$$

$$AR\to\frac{1}{6},(AP+AR=\frac{1}{3})$$

所以
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABR}-S_{\triangle APR}}{S_{\triangle ABC}}\to\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}$$

(2)此题可推广为如下命题:①

在$\triangle ABC$ 中,P、Q 为 AB 边上两点,$PQ=\frac{1}{n}s$($n>2$,s 为半周长),R 是折线 $PACBQ$ 的等分点,则$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{n^2}$,事实上,如图 10.8 所示,由 $PQ=\frac{s}{n}$,则知

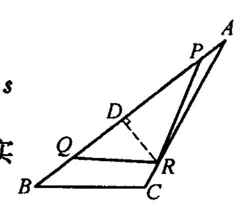


图 10.8

① 孟庆良. 三角形的一个性质[J]. 中等数学,1990(3):31-32.

$$AP+AR=\frac{n-1}{2n}s$$

而
$$AP+PQ\leqslant AB<\frac{s}{2}$$

故
$$AP<\frac{s}{2}-PQ$$

$$AR=\frac{n-1}{2n}s-AP>\frac{n-1}{2n}s-\frac{s}{2}+PQ=\frac{1}{2n}s$$

则
$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}PQ\cdot RD=\frac{1}{2}PQ\cdot AR\sin A>\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{n}\cdot\frac{s}{2n}\sin A>$$
$$\frac{(b+c)^2}{4n^2}\sin A\geqslant\frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A$$

(其中 $AB=c, AC=b$)故

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{n^2}$$

试题 B　设点 D、E、F 分别在△ABC 的三边 BC、CA、AB 上，且△AEF、△BFD、△CDE 的内切圆有相等的半径 r，又以 r_0 和 R 分别表示△DEF 和△ABC 的内切圆半径，求证：$r+r_0=R$.

证法 1　作辅助线如图 10.9 所示，于是有

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CED}-S_{\triangle AFE}=S_{\triangle DEF} \quad ①$$

记△ABC 与△DEF 的周长为 l 和 l'，则式①可化为

$$Rl-r(l+l')=r_0l'$$

即

$$(R-r)l=(r+r_0)l' \quad ②$$

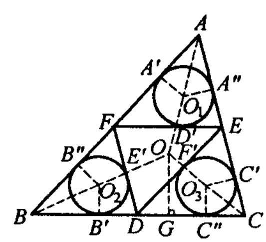


图 10.9

图中 O 为△ABC 的内心，$OG\perp BC$. 因

$$\triangle O_2BB'\backsim\triangle OBG$$

则

$$\frac{BB'}{BG}=+\frac{r}{R} \quad ③$$

又由
$$A'B''+B'C''+C'C''=l'$$

知
$$AA'+B''B+BB'+C''C+CC'+A''A=l-l'$$

从而由③可得

$$\frac{l-l'}{l}=\frac{r}{R}$$

即
$$(l-l')R=rl$$

或

$$(R-r)l=Rl' \qquad ④$$

将④代入②得 $Rl'=(r+r_0)l'$,即 $R=r+r_0$.

证法2 作辅助线如图10.10所示.因

$$O_1O_2+O_2O_3+O_3O_1=A'B''+B'C''+C'A''=$$
$$A'F+FB''+B'D+DC''+C'E+EA''=$$
$$FD'+FE'+DE'+DF'+EF'+ED'=$$
$$FD+DE+EF$$

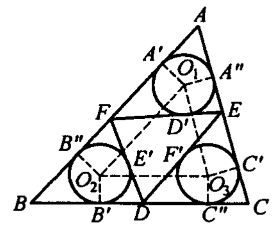


图10.10

从而$\triangle O_1O_2O_3$与$\triangle DEF$的周长相等,又因

$$S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA+DE+EF+FD)=$$
$$\frac{1}{2}r(AB+BC+CA+O_1O_2+O_2O_3+O_3O_1)=$$
$$S_{ABO_2O_1}+S_{BCO_3O_2}+S_{CAO_1O_3}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3}$$

则

$$S_{\triangle O_1O_2O_3}=S_{\triangle DEF}$$

由于$\triangle O_1O_2O_3$与$\triangle DEF$等周长、等面积,所以它们的内切圆半径相等,即$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆半径也是r_0.

因为$\triangle O_1O_2O_3$与$\triangle ABC$位似且位似中心就是二者的公共内心,从而有

$$r+r_0=R$$

证法3 如图10.11(a).把AF、FB、BD、DC、CE、EA分别记为a、b、c、d、e、f.又把EF、FD、DE分别记作g、h、k,则有

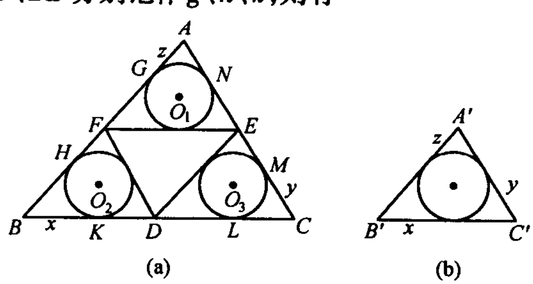


图10.11

$$r(a+f+g)=2S_{\triangle AFE},r(b+c+h)=2S_{\triangle BDF}$$

$$r(d+e+k)=2S_{\triangle CDE}, r_0(g+h+k)=2S_{\triangle DEF}$$

上面四式相加得

$$r(a+b+c+d+e+f+g+h+k)+r_0(g+h+k)=2S_{\triangle ABC}$$

即

$$r(a+b+c+d+e+f+g+h+k)+r_0(g+h+k)=$$
$$R(a+b+c+d+e+f) \quad ①$$

设 O_1、O_2、O_3 是三个半径为 r 的内切圆的圆心,切点为 G、H、K、L、M、N,并设

$$x=BH=BK, y=CL=CM, z=AG=AN$$

根据切线长定理有

$$g=EN+FG, h=DK+FH, k=DC+EM$$

则此推出

$$g+h+k+2x+2y+2z=a+b+c+d+e+f \quad ②$$

另外,四边形 AGO_1N、BHO_2K、CLO_3M 可拼成一个$\triangle A'B'C'$,如图10.11(b)所示.因$\angle A'=\angle A$,$\angle B'=\angle B$,$\angle C'=\angle C$,则$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.于是

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{R}=\frac{2x+2y+2z}{r}$$

即

$$2(x+p+z)=\frac{r}{R}(a+b+c+d+e+f) \quad ③$$

由①,②消去 $g+h+k$ 可得

$$r[2(a+b+c+d+e+f)-2(x+y+z)]+$$
$$r_0[a+b+c+d+e+f-2(x+y+z)]=$$
$$R(a+b+c+d+e+f) \quad ④$$

以③代入④约去 $a+b+c+d+e+f$ 可得

$$r\left(2-\frac{r}{R}\right)+r_0\left(1-\frac{r}{R}\right)=R$$

即

$$(r+r_0-R)(1-\frac{r}{R})=0$$

由 $1-\frac{r}{R}>0$ 最后得 $r+r_0=R$,证毕.

试题 C1 边长为$\frac{3}{2}$,$\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\sqrt{2}$的三角形纸片沿垂直于长度为$\frac{3}{2}$的边的方向折叠,问重叠部分面积的最大值是多少?

解法1 不妨设$\triangle ABC$中$a=\frac{3}{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$.如图10.12所示,设BC中点为D, $AE\perp BC$,且沿MN折叠时重叠部分面积取到最大值.则易知,M在D和E之间.设C关于MN的对称点为C', $C'N\cap AB=G$.令$DM=x$,则$BC'=2x$.

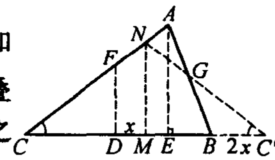


图 10.12

在$\triangle ABC$中,由余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

于是

$$\angle C=45^\circ,\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

在$\triangle BC'G$中

$$\sin G=\sin(\angle ABC-\angle C')=\sin(\angle ABC-\angle ACB)=$$

$$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

由正弦定理得

$$C'G=\frac{BC'\sin B}{\sin G}=4\sqrt{2}x$$

于是

$$S_{\triangle BC'G}=\frac{1}{2}\cdot BC'\cdot C'G\sin C'=4x^2$$

而

$$S_{\triangle C'MN}=S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}(\frac{a}{2}+x)^2$$

所以,重叠部分$MBGN$的面积为

$$S_{MBGN}=S_{\triangle C'MN}-S_{\triangle BC'G}=\frac{1}{2}(\frac{a}{2}+x)^2-4x^2=$$

$$-\frac{7}{2}(x-\frac{a}{14})^2+\frac{a^2}{4}\leqslant\frac{a^2}{7}$$

因此,当$x=\frac{a}{14}=\frac{3}{28}$时,$S_{MBGN}$取值$\frac{a^2}{7}=\frac{9}{28}$.下面验证当$x=\frac{3}{28}$时,$M$在$D$、$E$之间.事实上

$$AE=AC\cdot\sin C=1$$

故

$$DE=CE-CD=AE-CD=\frac{1}{4}$$

又$\frac{3}{28}<\frac{1}{4}$,所以M在D、E之间,故当$DM=\frac{3}{28}$时,重叠部分取到最大值$\frac{9}{28}$.

解法2 提示:折叠线l在高AO与BC的垂直平分线之间时,面积S才可

能达到最大.如图 10.13 所示,建立坐标系,易知 A、B、C 三点的坐标.设折叠线 l 交 OC 于 E,交 AC 于 H,重叠部分为图中四边形 $EFGH$.

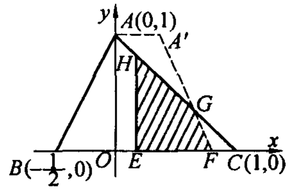


图 10.13

试题 C2　已知$\triangle ABC$,在边 AB、BC 和 CA 上分别向三角形外作正方形 $ABEF$、$BCGH$ 和 $CAIJ$.设 $AH\cap BJ=P_1$,$BJ\cap CF=Q_1$,$CF\cap AH=R_1$,$AG\cap CE=P_2$,$BI\cap AG=Q_2$,$CE\cap BI=R_2$.求证:$\triangle P_1Q_1R_1\backsim\triangle P_2Q_2R_2$.

证明　设 $BI\cap CF=L$,$CE\cap AH=M$,$AG\cap BJ=N$,A'、B'、C' 分别为正方形 $BCGH$、$CAIJ$、$ABEF$ 的中心,如图 10.14 所示.

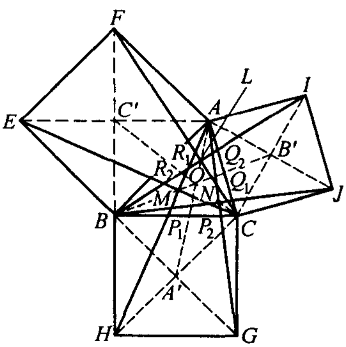


图 10.14

显然,将$\triangle ABI$ 绕点 A 顺时针旋转 90°,恰与$\triangle AFC$ 重合,从而 $BI\perp CF$,$\angle BLC=90°$.又 A' 为正方形 $BCGH$ 的中心,故$\angle BA'C=90°$.因此,A'、B、L、C 四点共圆,又 $A'B=A'C$,从而它们所对圆周角相等,即

$$\angle BLA'=\angle CAL'=45°$$

又$\angle FLB=\angle FAB=90°$,于是,$A$、$L$、$B$、$F$ 四点共圆,从而,$\angle FLA=\angle FBA=45°$.所以,$\angle FLA=\angle CLA'=45°$,$A$、$L$、$A'$ 三点共线,即 AL 过正方形 $BCCH$ 的中心 A'.

同理可证,BM 过正方形 $CAIJ$ 的中心 B',CN 过正方形 $ABEF$ 的中心 C'.且$\angle CMB'=\angle AMB'=45°$,$\angle ANC'=\angle BNC'=45°$.

我们可以证明 AA'、BB'、CC' 三线共点,设其公共点为 O,其证明放在最后,我们先承认这一结论.

注意到$\angle AMB'=45°$,$\angle AME=90°$,有$\angle R_2MO=135°$.又$\angle R_2LO=\angle BLA'=45°$,有$\angle R_2MO+\angle R_2LO=180°$,于是,$L$、$R_2$、$M$、$O$ 四点共圆.显然,$\angle R_1LR_2=\angle R_2MR_1=90°$,因而,$L$、$R_1$、$R_2$、$M$ 四点共圆,从而 L、R_1、R_2、M、O 五点共圆.故$\angle R_1R_2O=\angle R_1MO=45°$,$\angle R_2R_1O=\angle R_2LO=45°$,因而,$\triangle OR_1R_2$ 为等腰直角三角形,$OR_1=OR_2$.同理可证,Q_1、Q_2、L、O、N 五点共圆,$\triangle OQ_1Q_2$ 为等腰直角三角形,$OQ_1=OQ_2$.从而,$\triangle R_1OQ_1\cong\triangle R_2OQ_2$,故 $R_1Q_1=R_2Q_2$.同理

$$P_1Q_1=P_2Q_2,R_1P_1=R_2P_2$$

从而 $$\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle P_2Q_2R_2$$

最后证明 AA'、BB'、CC' 三线共点. 事实上,可以证明更一般的结论:

在 $\triangle ABC$ 外作三个有相同底角的等腰三角形 BCA'、CAB'、ABC',则 AA'、BB'、CC' 三线共点.

下面来证明上述结论. 设三等腰三角形的底角为 θ, $\angle CAA' = \alpha_1$, $\angle BAA' = \alpha_2$, $\angle ABB' = \beta_1$, $\angle CBB' = \beta_2$, $\angle BCC' = \gamma_1$, $\angle ACC' = \gamma_2$,如图 10.15 所示. 由正弦定理得

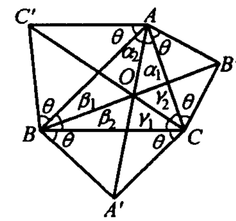


图 10.15

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)} = \frac{BA'}{AA'}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\theta)} = \frac{CA'}{AA'}$$

由于 $BA' = CA'$,所以

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\theta)}{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)}$$

同理可证
$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\theta)}{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\theta)}$$

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\theta)}$$

三式相乘,得

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}\cdot\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1 \quad ①$$

设 $BB' \cap CC' = O$, $\angle BAO = \alpha_2'$, $\angle CAO = \alpha_1'$. 我们要证 O 在 AA' 上,即要证 $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$.

由正弦定理可得

$$\frac{\sin \alpha_1'}{\sin \gamma_2} = \frac{OC}{OA}, \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_2} = \frac{OB}{OC}, \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2'} = \frac{OA}{OB}$$

于是

$$\frac{\sin \alpha_1'}{\sin \gamma_2}\cdot\frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_2}\cdot\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2'} = 1, \frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2'}\cdot\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}\cdot\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1 \quad ②$$

由①,②得

$$\frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2'} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

从而
$$\frac{\sin \alpha_1' + \sin \alpha_2'}{\sin \alpha_1' - \sin \alpha_2'} = \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}$$

$$\tan \frac{\alpha_1' + \alpha_2'}{2} \cot \frac{\alpha_1' - \alpha_2'}{2} = \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad ③$$

又显然有

$$0 < \alpha_1' + \alpha_2' = \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \quad ④$$

所以,由③得

$$\cot \frac{\alpha_1' - \alpha_2'}{2} = \cot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

由于
$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha_1' - \alpha_2'}{2} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\alpha_1' - \alpha_2' = \alpha_1 - \alpha_2 \quad ⑤$$

由④,⑤即得

$$\alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2$$

这就证明了 AA'、BB'、CC' 三线共点.

试题 C3 已知 AD 是△ABC 的高,$BC + AD - AB - AC = 0$.求 $x = \angle BAC$ 的取值范围.

解 显然

$$AD \leqslant AB, AD \leqslant AC$$

故
$$BC + AD - AB - AC = 0$$

得
$$BC \geqslant AC, BC \geqslant AB$$

从而$\angle B$、$\angle C$ 都是锐角.

若$\angle A$ 为直角,则 $AB \cdot AC = AD \cdot BC$.从而,$AB + AC < BC + AD$,矛盾.若$\angle A$ 为钝角,作$\angle BAC' = 90°$,C'在线段 DC 上,则

$$BC + AD = BC' + AD + C'C > AB + AC' + C'C > AB + AC$$

矛盾.故$\angle A$ 必为锐角.

如图 10.16,设$\angle BAD = x_2$,$\angle DAC = x_1$,不妨设 $x_2 \geqslant x_1$.则 $x = x_1 + x_2$,由

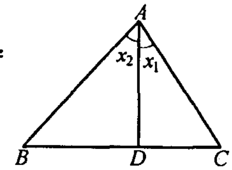


图 10.16

$$BC + AD - AB - AC = 0$$

得
$$\tan x_1 + \tan x_2 + 1 = \frac{1}{\cos x_1} + \frac{1}{\cos x_2}$$

化简得

$$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \qquad ①$$

其中 $\alpha=x_2-x_1\in[0,x)$.

式①右边是 $\cos\frac{x}{2}$ 的二次函数,在 $\alpha=0$ 时,取最小值 $2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;在 $\alpha=x$ 时,取最大值 $\frac{1}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$.因此

$$2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\leqslant\sin x+\frac{1}{2}\cos x<\frac{1}{2}+\cos^2\frac{x}{2} \qquad ②$$

式②左边的不等式导出 $x\geqslant 2\arcsin\frac{3}{5}$,右边的不等式恒成立.而对于 $[2\arcsin\frac{3}{5},\frac{\pi}{2})$ 中的每一个 x,由于②成立,因而必有 $\alpha\in[0,x)$ 使①成立,所以本题解为 $[2\arcsin\frac{3}{5},\frac{\pi}{2})$.

第1节　三角形的界心问题

关于三角形的界心问题,在这里介绍几个重要的结论.①

过三角形边界上某一特殊点的直线将三角形周长平分,称这条直线为过该特殊点的分周线.若过三个特殊点的分界线交于一点,则称这点为三角形的界心.

定理1②③　分别过△ABC三顶点的三条分周线交于一点 J,此点称为△ABC的第一界心,有时也直接称为界心.

证明　如图10.17,在△ABC中,过 A、B、C 的分周线为 AD、BE、CF,设 $AB=c$,$AC=b$,$BC=a$,半周长为 p.

容易算得

$$AF=CD=p-b,BF=CE=p-a,BD=AE=p-c$$

故
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

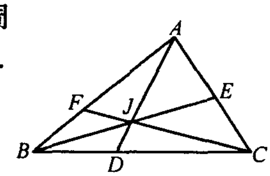


图10.17

由塞瓦定理知,AD、BE、CF 交于一点,记为 J.

定理2　分别过△ABC三边中点的三条分周线交于一点 K.此点称为△ABC的第二界心.

---

① 沈文选.平面几何证明方法全书[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005:338-342.
② 夏培贵.关于分周线的三个定理[J].中学数学教学,1999(2):19-20.
③ 赵彪,李侠.关于三角形界心几个定理的几何证明[J].中学数学教学,1999(6):8.

证明　如图10.18，在$\triangle ABC$中，过三边中点M、N、L的三条分周线MS、NT、LU分别交LN、LM、MN于D、E、F.容易知道

$$SL=\frac{b}{2},MN=\frac{c}{2}$$

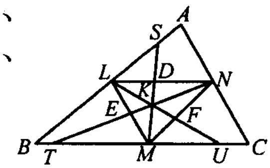


图10.18

由$\triangle SLD \backsim \triangle MND$得

$$\frac{LD}{ND}=\frac{LS}{MN}=\frac{b}{c}$$

同理可得
$$\frac{NF}{MF}=\frac{a}{b},\frac{ME}{LE}=\frac{c}{a}$$

在$\triangle MNL$中，有

$$\frac{LD}{ND}\cdot\frac{NF}{MF}\cdot\frac{ME}{LE}=1$$

故MD、NE、LF共点，即MS、NT、LU共点，记为K.

定理3　$\triangle ABC$第一界心J、第二界心K、重心G三点共线.

证明　如图10.19，在$\triangle ABC$中不妨假定$a \geqslant b \geqslant c$，$G$为重心，$J$为第一界心.过$G$、$J$作直线$l$，设交$AC$于$P$，联结$AJ$、$AG$交$BC$于$S_1$、$S_2$，其中$S_2$是中点；联结$CJ$、$CG$交$AB$于$T_1$、$T_2$，其中$T_2$是中点.

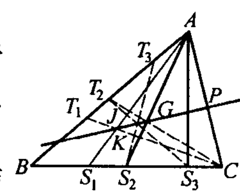


图10.19

设S_3是与T_2对应的分周点，T_2S_3交l于K'，联结S_2K'，延长交AB于T_3.只要证明S_2T_3也是分周线，即可证明K'是第二界心.

容易算得

$$S_1S_2=\frac{c-b}{2},S_2S_3=\frac{b}{2},S_3C=\frac{a-b}{2}$$

$$T_1T_2=\frac{a-b}{2},S_1S_3=T_2A=\frac{c}{2},S_1C=T_1A=p-b$$

考察线束(AS_1,AS_2,AS_3,AC)和(CT_1,CT_2,CT_3,CA)，由中心投影点列交比不变性，知

$$(T_1,T_2,T_3,A)=(J,K',G,P)=(S_1,S_2,S_3,C)$$

而有
$$\frac{T_1T_2\cdot T_3A}{T_2T_3\cdot T_1A}=\frac{S_1S_2\cdot S_3A}{S_2S_3\cdot S_1A}$$

代入上述线段值计算，得

$$\frac{T_1T_3}{T_2T_3}=\frac{S_2C}{S_2S_3},T_2T_3=\frac{b}{2}$$

故知 S_2T_3 是△ABC 分周线,从而 K' 即是△ABC 的第二界心 K,故 J、K、G 共线.

由此定理可知,任意△ABC,都有 J、K、G 所决定的一条特殊直线.仿"欧拉线"、"牛顿线",已有人将其称为"夏氏线",以示对其发现者的尊敬.

定理 4[①] △ABC 的第一界心 J 与△ABC 重心 G、内心 I 共线.

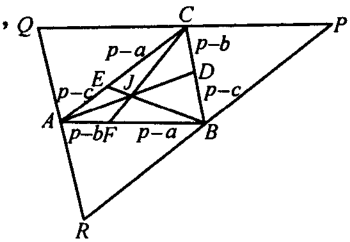


图 10.20

证明 如图 10.20,J 是△ABC 第一界心,△ACF 被直线 BJE 截于 B、J、E,由梅涅劳斯定理

$$\frac{CJ}{JF}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$$

若设三边 $AB=c$,$BC=a$,$AC=b$,p 为半周长,则

$$AF=CD=p-b,BF=CE=p-a$$

$$AE=BD=p-c$$

从而

$$\frac{CJ}{JF}=\frac{BA}{FB}\cdot\frac{EC}{AE}=\frac{c}{p-a}\cdot\frac{p-a}{p-c}=\frac{c}{p-c}\Rightarrow\frac{CJ}{CF}=\frac{c}{p}$$

过 A、B、C 分别作对边平行线,交成△PQR,如图 10.20 所示.且设 J 到 PQ、PR、QR 距离分别为 l_C、l_B、l_A,C 到 AB 距离(即△ABC 边 AB 上高)为 h_C,则

$$\frac{JC}{CF}=\frac{l_C}{h_C}=\frac{c}{p}$$

因此

$$l_C=\frac{c\cdot h_C}{p}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{p}\text{(定值)}$$

同理可得 $l_A=l_B=2S_{\triangle ABC}/p$.

即点 J 到△PQR 三边等距,且 J 又在△PQR 内,故 J 是△PQR 内心.

显然△PQR 与 $S_{\triangle ABC}$关于它们公共重心 G 逆位似,因此,△PQR 内心 J 与△ABC 内心 I 关于 G 也逆位似(J、I 分居 G 两侧),即 J、G、I 共线.

定理 5 △ABC 的第二界心 K 与△ABC 重心 G、内心 I 共线.

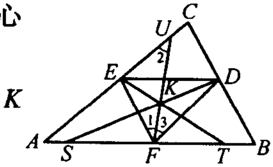


图 10.21

证明 如图 10.21,设 D、E、F 为△ABC 三边中点,K 为第二界心,则易知

$$EU=a/2=EF$$

又

$$DF\,/\!/\,CA$$

① 陈传孟.关于三角形界心的三个定理[J].中学数学教学,1999(6):9.

从而 $$\angle 1=\angle 2=\angle 3$$

即 FU 为 $\angle DFE$ 分角线.

同理可证 DS、ET 分别是 $\angle EDF$、$\angle DEF$ 的分角线.故点 K 是 $\triangle DEF$ 的内心.

又显然，$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 关于公共重心 G 逆位似，故 $\triangle DEF$ 内心 K 与 $\triangle ABC$ 内心 I 关于 G 逆位似（K、I 分居 G 两侧），即 K、G、I 共线.

推论1 $\triangle ABC$ 第一界心、第二界心与重心共线.

证明 由定理4、定理5知，J、K 均在直线 GI 上，故 J、K、G 共线.

推论2[①] $\triangle ABC$ 的第一界心 J、第二界心 K 和重心 G、内心 I 共线，且 $JK:KG:GI=3:1:2$.

证明 由上述定理4知，$\triangle PQR$ 与 $\triangle ABC$ 呈逆位似，位似比为 $k=-2$，从而 J 与 I 在 G 两侧，且 $JG:GI=2:1$.

又由上述定理5知，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 也呈逆位似，位似比 $k=-2$，从而 K 与 I 也在 G 两侧，且 $KG:GI=1:2$. 综上所述，得

$$JK:KG:GI=3:1:2$$

J、K、G、I 四点在"夏氏线"上的位置，如图10.22所示.

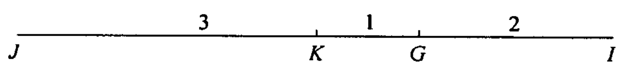


图 10.22

这是一个十分精采的结果，它完全可以与"欧拉线"等相媲美.

定理6[②] $\triangle ABC$ 的第一界心 J 到三边的距离分别记为 f_a、f_b、f_c，$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$、$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，S 是 $\triangle ABC$ 的面积.则

$$f_a=2S\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right), f_b=2S\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{p}\right), f_c=2S\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{p}\right)$$

证明 如图10.23，J 是 $\triangle ABC$ 的第一界心，$\triangle ACF$ 被直线 BJE 截于 B、J、E，由梅涅劳斯定理

$$\frac{CJ}{JF}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$$

因为 $$AF=CD=p-b, BF=CE=p-a, AE=BD=p-c$$

① 胡炳生.一个重要的推论[J].中学数学教学，1999(6):9.
② 郭要红.三角形第一、二界心到三边的距离公式[J].中学数学教学，2006(6):35.

从而 $\frac{CJ}{JF}=\frac{BA}{FB}\cdot\frac{EC}{AE}=\frac{c}{p-a}\cdot\frac{p-a}{p-c}=\frac{c}{p-c}\Rightarrow\frac{CF}{JF}=\frac{p}{p-c}$

过 J、C 分别作 AB 的垂线 JN、CM，N、M 为垂足，则

$JN=f_c$，$CM=\frac{2S}{c}$，又

$$\frac{CF}{JF}=\frac{CM}{JN}=\frac{p}{p-c}$$

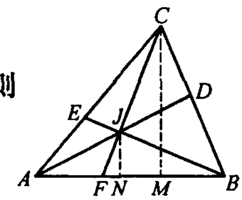


图 10.23

则
$$f_c=JN=\frac{CM(p-c)}{p}=2S(\frac{1}{c}-\frac{1}{p})$$

同理
$$f_a=2S(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}),f_b=2S(\frac{1}{b}-\frac{1}{p})$$

定理7 △ABC 的第二界心 K 到三边 BC、CA、AB 的距离分别为 g_a、g_b、g_c，$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$、$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，S 是△ABC 的面积. 则

$$g_a=S(\frac{1}{a}-\frac{1}{2p}),g_b=S(\frac{1}{b}-\frac{1}{2p}),g_c=S(\frac{1}{c}-\frac{1}{2p})$$

由三角形重心的性质，容易得到下列引理.

引理1 △ABC 的重心 K 到三边 BC、CA、AB 的距离分别为 q_a、q_b、q_c，$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，S 是△ABC 的面积. 则

$$q_a=\frac{2S}{3a},q_b=\frac{2S}{3b},q_c=\frac{2S}{3c}$$

定理7的证明 如图 10.24，过 J、K、G 分别作 AB 的垂线 JT、KU、GV，T、U、V 为垂足，过 J 作 GV 的垂线 JY 交 KU 于 X，交 GV 于 Y. 根据推论2，得

$$JK:KG=3:1$$

即
$$JK:JG=3:4$$

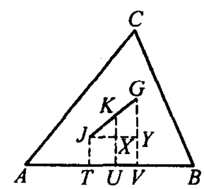


图 10.24

则
$$KX:GY=JK:JG=3:4$$

即
$$(g_c-f_c):(q_c-f_c)=3:4$$

从而 $g_c=\frac{3}{4}(q_c-f_c)+f_c=\frac{3}{4}q_c+\frac{1}{4}f_c=\frac{S}{2c}+\frac{S}{2}(\frac{1}{c}-\frac{1}{p})=S(\frac{1}{c}-\frac{1}{2p})$

同理
$$g_a=S(\frac{1}{a}-\frac{1}{2p}),g_b=S(\frac{1}{b}-\frac{1}{2p})$$

定理8[①] 在非钝角△ABC 中，设三边长分别为 a、b、c，外接圆半径、内切

① 王明建，朱子萍. 三角形第一界心、重心到各边距离之和的一个不等式[J]. 中学数学教学，2006(6):34.

圆半径分别为 R、r,半周长为 p,J 为 $\triangle ABC$ 的第一界心(称平分三角形周长的直线为三角形的分周线.过三角形三顶点的三条分周线交于一点,称此交点为三角形的第一界心),D_J 表示 J 到 $\triangle ABC$ 各边距离之和,G 为 $\triangle ABC$ 的重心,D_G 表示 G 到 $\triangle ABC$ 各边距离之和,则 $D_J \geqslant D_G$,当且仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形时取等号.

为证命题,先证明两个引理.

引理 2　如果 J 为非钝角 $\triangle ABC$ 的第一界心,D_J 表示 J 到三角形 $\triangle ABC$ 各边距离之和,那么

$$D_J = 2r\sum \frac{p-a}{a}\text{(}\sum\text{ 表示三元循环和)}$$

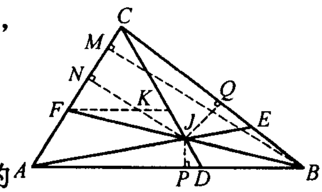


图 10.25

证明　如图 10.25,在 $\triangle ABC$ 中,J 为 $\triangle ABC$ 的第一界心,过点 F 作 $FK /\!/ AB$ 交 CD 于点 K,有

$$\frac{FK}{p-a} = \frac{p-b}{b}$$

(其中 $AD = p-b$, $CF = p-a$)又 $\triangle FKJ \backsim \triangle BDJ$ 有 $\frac{FK}{p-a} = \frac{FJ}{BJ}$,所以 $\frac{FJ}{BJ} = \frac{p-b}{b}$,故

$$\frac{FJ}{BF} = \frac{p-b}{p} \quad ①$$

过 B 作 $BM \perp AC$,垂足为 M,过 J 作 $JN \perp AC$,垂足为 N,则

$$\frac{JN}{BM} = \frac{JF}{BF} \quad ②$$

$$BM = \frac{2S}{b}\text{(}S\text{ 表示}\triangle ABC\text{ 的面积)} \quad ③$$

由①、②、③得

$$JN = \frac{(p-b)2S}{pb} = \frac{(p-b)2r}{b}$$

同理过 J 作 $JP \perp AB$,垂足为 P,过 J 作 $JQ \perp BC$,垂足为 Q,则

$$JP = \frac{(p-c)2r}{c},\ JQ = \frac{(p-a)2r}{a}$$

所以

$$D_J = 2r\sum \frac{p-a}{a}$$

引理 3　如果 G 为非钝角 $\triangle ABC$ 的重心,D_G 表示 G 到 $\triangle ABC$ 各边距离之和,那么

$$D_G=\frac{\sum ab}{6R}$$

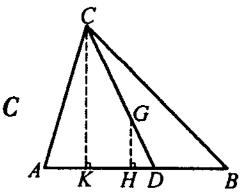


图 10.26

证明 如图 10.26,在非钝角$\triangle ABC$中,G是重心,过C作$CK\perp AB$,过G作$GH\perp AB$,由

$$\triangle DHG\backsim\triangle DKC,DG:GC=1:2$$

及
$$S=\frac{abc}{4R}$$

得
$$GH=\frac{1}{3}CK=\frac{2S}{3c}=\frac{ab}{6R}$$

同理G到另两边的距离分别是$\frac{cb}{6R}$和$\frac{ca}{6R}$,故$D_G=\frac{\sum ab}{6R}$.

下面证明定理 8:由

$$D_J=2r\sum\frac{p-a}{a},D_G=\frac{\sum ab}{6R}$$

则
$$D_J\geqslant D_G\Leftrightarrow 2r\sum\frac{p-a}{a}\geqslant\frac{\sum ab}{6R}\Leftrightarrow\frac{\sum ab}{2R}\geqslant\frac{\sum ab}{6R}+6r\Leftrightarrow$$
$$\sum ab\geqslant 18Rr(\sum ab=p^2+4Rr+r^2)\Leftrightarrow$$
$$p^2+4Rr+r^2\geqslant 18Rr\Leftrightarrow P^2\geqslant 14Rr-r^2 \qquad ④$$

由格瑞特森不等式①$p^2\geqslant 16Rr-5r^2$,知④成立,故$D_J\geqslant D_G$,当且仅当$\triangle ABC$是正三角形时取等号.

定理 9 设$\triangle ABC$的关于顶点的周界中点$\triangle LMN$与$\triangle ABC$的面积有下述关系式,即

$$S_{\triangle LMN}=\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$$

其中R、r分别为$\triangle ABC$的外接圆、内切圆半径.

证明 如图 10.27,设$\triangle ALN$、$\triangle BLM$、$\triangle CMN$的面积分别为S_A、S_B、S_C,$\triangle ABC$的三边长分别为a、b、c,且

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

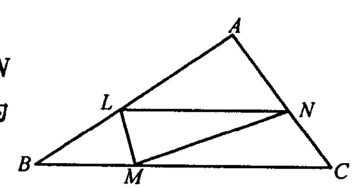


图 10.27

注意到

① 匡继昌.常用不等式[M].长沙:湖南教育出版社,1993:5.

$$S_A=\frac{1}{2}AL\cdot AN\sin A=\frac{1}{2}(p-c)(p-b)\frac{a}{2R}=\frac{a}{4R}(p-b)(p-c)$$

同理 $$S_B=\frac{b}{4R}(p-a)(p-c),S_C=\frac{c}{4R}(p-a)(p-b)$$

故 $$S_A+S_B+S_C=\frac{a(p-b)(p-c)+b(p-a)(p-c)+c(p-a)(p-b)}{4R}=$$

$$\frac{2p^3-2p(ab+bc+ca)+3abc}{4R}$$

由三角形中的恒等式

$$ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2,abc=4Rrp$$

易得 $$S_A+S_B+S_C=rp-\frac{r^2p}{2R}$$

又 $rp=\triangle ABC$,于是

$$S_A+S_B+S_C=S_{\triangle ABC}-\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$$

故 $S_{\triangle LMN}=S_{\triangle ABC}-(S_A+S_B+S_C)=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle ABC}-\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC})=\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$

注 关于界心研究的历史情况:①

19世纪后半叶到20世纪初叶,包括布罗卡(Brocard,1845—1922)、莱莫恩(Lemoine,1840—1912)、约尔刚(Gergonne,1771—1859)和奈格尔(Nagel,1821—1903)在内的一大批数学家,掀起过一阵研究欧氏几何的热潮,获得了不少新结果.

我们现在就来看一看,这阵热潮中关于这方面有些什么主要结果.

(1)$\triangle ABC$ 内切圆切三边于 D、E、F,则 AD、BE、CF 相交于一点 M,这一点称为约尔刚点;

(2)$\triangle ABC$ 旁切圆切三边于 P、Q、R,则 AP、BQ、CR 相交于一点 N,这一点称为奈格尔点;

(3)$\triangle ABC$ 的约尔刚点和奈格尔点为一对等距共轭点;

(4)$\triangle ABC$ 重心 G、内心 I 和奈格尔点共线,且 $GN=2IG$;

(5)设 S 是 IN 的中点,则 S 是 $\triangle ABC$ 的中点三角形 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心,$\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆称为斯毕克圆.

联系现象,回顾历史,我们可以得到以下一些结论.

① 郭要红.界心、Nagel点及其他[J].中学数学教学,2001(5):39.

(1)$\triangle ABC$ 的第一界心 J,就是奈格尔点.

事实上,如图 10.28 所示,在$\triangle ABC$ 中,若 D、E、F 分别是三边 BC、CA、AB 上内切圆的切点,显然,AD、BE、CF 是分周线.故其交点——奈格尔点,即是第一界心 J.只是在奈格尔的时代,还无“界心”这个概念,因此,也没有人指出这一点.

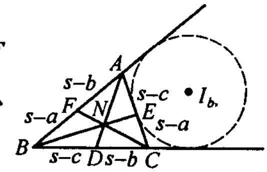


图 10.28

(2)$\triangle ABC$ 的第二界心 K,即斯毕克圆的圆心 S,如图 10.29 所示.

事实上,$\triangle ABC$ 的第二界心 K,是内心 I 和第一界心 J 的中点,与斯毕克圆的圆心 S 的定义一致,即点 J 就是S.不过,那时也许没有人注意点 S 具有第二界心的性质.现在夏培贵等从“界心”这一概念出发,指出了这一点.

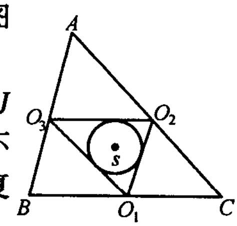


图 10.29

第 2 节　三角形的内接三角形问题

某三角形的三个顶点均在一个三角形的周界上,则称其为三角形的内接三角形.三角形有一系列的特殊内接三角形.

定义 1　以三角形三边上的高线的垂足为顶点的三角形叫做原三角形的垂足三角形.

定义 2　以三角形的内切圆与三边的三个切点为顶点的三角形叫做原三角形的切点三角形.

定义 3　以三角形三边上的界点(过三角形顶点的分周线)为顶点的三角形叫做原三角形的界点三角形.

定义 4　以三角形三个内角平分线与对边的交点为顶点的三角形叫做原三角形的内角平分线足三角形.

定义 5　以三角形三边中点为顶点的三角形叫做原三角形的中点三角形.

这里约定$\triangle ABC$ 的三内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边长分别为 a、b、c,面积为 S,且$\triangle ABC$ 的半周长为$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

定理 1①　在锐角三角形中,三角形的垂足三角形、切点三角形、界点三角形、内角平分线足三角形、中点三角形的面积满足下列关系,即

① 赵心敬,焦和平.三角形的内接三角形面积的不等式链[J].数学通报,1996(8):33-34.

$$S_{垂足三角形} \leqslant S_{切点三角形} = S_{界点三角形} \leqslant S_{内角平分线足三角形} \leqslant S_{中点三角形}$$

当且仅当原三角形为正三角形时,上式中的等号均成立.

为了证明此定理,需用下列大家熟知的三角关系及五个引理.

在$\triangle ABC$中

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad ①$$

$$1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 2\cos A\cos B\cos C \quad ②$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \geqslant 3\sqrt{3} \quad ③$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad ④$$

引理 1　锐角三角形的垂足三角形的面积与原三角形的面积比为 $2\cos A\cos B\cos C$.

证明　如图 10.30,$\triangle DEF$ 是$\triangle ABC$ 的垂足三角形.可求得

$$AD = b\cos A, AF = c\cos A, BD = a\cos B$$

$$BE = c\cos B, CE = b\cos c, CF = a\cos C$$

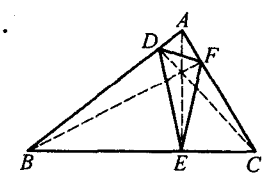


图 10.30

记$\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CFE$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3.则

$$\frac{S_1}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A} = \frac{bc\cos^2 A}{bc} = \cos^2 A$$

同理
$$\frac{S_2}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 B, \frac{S_3}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 C$$

则
$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

故
$$\frac{S_{垂足三角形}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC} - (S_1 + S_2 + S_3)}{S_{\triangle ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) =$$
$$2\cos A + \cos B + \cos C$$

引理 2　三角形的切点三角形的面积与原三角形面积的比为 $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

证明　如图 10.31,$\triangle DEF$ 是$\triangle ABC$ 的切点三角形.可求得

$$AD = AF = p - a, BD = BE = p - b, CE = CF = p - c$$

记$\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CFE$的面积为S_1、S_2、S_3. 则

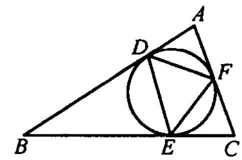


图 10.31

$$\frac{S_1}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}=\frac{(p-a)^2}{bc}$$

同理 $$\frac{S_2}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-b)^2}{ac},\frac{S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-b)^2}{ab}$$

则 $$\frac{S_1+S_2+S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-a)^2}{bc}+\frac{(p-b)^2}{ac}+\frac{(p-c)^2}{ab}=$$

$$\frac{(b+c-a)^2}{4bc}+\frac{(a+c-b)^2}{4ac}+\frac{(a+b-c)^2}{4ab}=$$

$$\frac{a(a^2-b^2-c^2)+b(b^2-a^2-c^2)+c(c^2-a^2-b^2)+6abc}{4abc}=$$

$$\frac{a(-2bc\cos A)+a(-2ac\cos B)+c(-2ab\cos C)+6abc}{4abc}=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=$$

$$1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故 $$\frac{S_{切点三角形}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-(S_1+S_2+S_3)}{S_{\triangle ABC}}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

引理 3 三角形的界点三角形与切点三角形的面积相等.

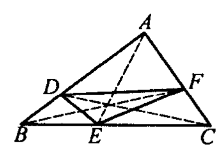


图 10.32

证明 如图 10.32, $\triangle DEF$是$\triangle ABC$的界点三角形, 可求得

$$AD=EC=p-b,DB=CF=p-a,BE=FA=p-c$$

记$\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CFE$的面积分别为S_1、S_2、S_3, 则

$$\frac{S_1}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

同理 $$\frac{S_2}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}$$

$$\frac{S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}+\frac{(p-a)(p-c)}{ac}+\frac{(p-a)(p-b)}{ab}=$$

$$\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}+\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4ac}+$$
$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4ab}=$$
$$\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4bc}+\frac{b^2-a^2-c^2+2ac}{4ac}+\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{4ab}=$$
$$\frac{-2bc\cos A+2bc}{4bc}+\frac{-2ac\cos B+2ac}{4ac}+\frac{-2ab\cos C+2ab}{4ab}=$$
$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=$$
$$1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故 $$\frac{S_{界点三角形}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-(S_1+S_2+S_3)}{S_{\triangle ABC}}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{S_{切点三角形}}{S_{\triangle ABC}}$$

即 $$S_{界点三角形}=S_{切点三角形}$$

引理 4 三角形的内角平分线足三角形的面积与原三角形的面积之比为

$$\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}$$

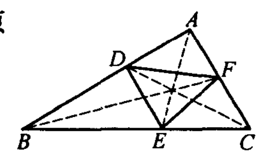


图 10.33

证明 如图 10.33，$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线足三角形.

由 CD 平分 $\angle C$ 可得

$$AD:(c-AD)=b:a$$

则 $$AD=\frac{bc}{a+b}$$

同理 $$DB=\frac{ac}{a+b},BE=\frac{ac}{b+c},CE=\frac{ab}{b+c},CF=\frac{ab}{a+c},FA=\frac{bc}{a+c}$$

记 $\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CFE$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3. 则

$$\frac{S_1}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}=\frac{\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c}}{bc}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

同理 $$\frac{S_2}{S_{\triangle ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)},\frac{S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{ab}{(b+c)(a+c)}$$

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{ab}{(b+c)(a+c)}=$$

$$\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

故
$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle}-(S_1+S_2+S_3)}{S_{\triangle}}=\frac{2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$
$$\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}$$

引理5 三角形的中点三角形的面积与原三角形的面积之比为$\frac{1}{4}$.

定理证明如下.

根据引理1和引理2,得

$$S_{垂足三角形}=2\cos A\cos B\cos CS_{\triangle ABC}$$
$$S_{切点三角形}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}S_{\triangle ABC}$$

故
$$\frac{S_{切点三角形}}{S_{垂足三角形}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos A\cos B\cos C}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{8\cos A\cos B\cos C\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$\frac{\tan A\tan B\tan C}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{8\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}}=1$$

即 $S_{垂足三角形}\leqslant S_{切点三角形}$,即式①成立.

根据引理3,式②成立.

根据引理4

$$\frac{S_{内角平分线足三角形}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}$$

而
$$(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)\geqslant$$
$$2\sqrt{\sin A\sin B}\cdot 2\sqrt{\sin B\sin C}\cdot 2\sqrt{\sin C\sin A}=$$
$$8\sin A\sin B\sin C$$

则
$$\frac{S_{内角平分线足三角形}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\frac{2\sin A\sin B\sin C}{8\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{4}$$

故 $S_{内角平分线足三角形}\leqslant S_{中点三角形}$,即式④成立,又由

$$\frac{S_{内角平分线足三角形}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}=$$
$$\frac{2\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}=$$

$$\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

及
$$0<\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\leqslant 1$$

则
$$\frac{S_{\text{内角平分线足三角形}}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}\geqslant$$
$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{S_{\text{界点三角形}}}{S_{\triangle ABC}}$$

故 $S_{\text{界点三角形}}\leqslant S_{\text{内角平分线足三角形}}$，即式③成立.

综上，有
$$S_{\text{垂足三角形}}\leqslant S_{\text{切点三角形}}=S_{\text{界点三角形}}\leqslant S_{\text{内角平分线足三角形}}\leqslant S_{\text{中点三角形}}$$
(上述不等式中，均为当 $\angle A=\angle B=\angle C$ 时取等号)

注　(1)当原三角形为直角三角形时，垂足三角形的面积为 0.

(2)当原三角形为钝角三角形时，垂足三角形的面积与原三角形的面积比为 $-2\cos A\cos B\cos C$. 此时不等式式链
$$S_{\text{切点三角形}}=S_{\text{界点三角形}}<S_{\text{内角平分线足三角形}}<S_{\text{中点三角形}}$$
仍成立.

定理 2①　设 A_0、B_0、C_0 分别位于 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上，若
$$AC_0:C_0B=m:n,BA_0:A_0C=p:q,CB_0:B_0A=r:s$$
$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积分别为 S 与 S_0，则
$$S_0=\frac{mpr+nqs}{(m+n)(p+q)(r+s)}s$$

证明　如图 10.34，设 $\triangle AC_0B_0$、$\triangle BA_0C_0$、$\triangle CB_0A_0$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，则由三角面积比的性质知
$$\frac{S_1}{S}=\frac{AC_0\cdot AB_0}{AB\cdot AC}$$

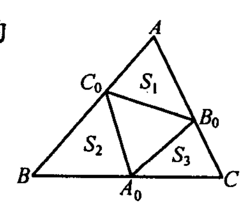


图 10.34

但由已知条件 $\frac{AC_0}{C_0B}=\frac{m}{n}$，可得
$$\frac{AC_0}{AB}=\frac{m}{m+n},AC_0=\frac{m}{m+n}AB$$

① 苏化明. 一个关于三角形的定理及其应用[J]. 中学教研(数学)，1990(1):30-32.

由$\frac{CB_0}{B_0A}=\frac{r}{s}$,可得

$$\frac{AB_0}{B_0C}=\frac{s}{r},\frac{AB_0}{AC}=\frac{s}{r+s},AB_0=\frac{s}{r+s}AC$$

于是
$$\frac{S_1}{S}=\frac{ms}{(m+n)(r+s)}$$

所以
$$S_1=\frac{ms}{(m+n)(r+s)}S$$

同理有
$$S_2=\frac{np}{(m+n)(p+q)}S,S_3=\frac{qr}{(p+q)(r+s)}S$$

从而 $S_0=S-(S_1+S_2+S_3)=$

$$S\left[1-\left(\frac{ms}{(m+n)(r+s)}+\frac{np}{(p+q)(p+q)}+\frac{qr}{(p+q)(r+s)}\right)\right]=$$

$$\frac{mpr+nqs}{(m+n)(p+q)(r+s)}S$$

推论 1 设$\triangle ABC$的三边长为$BC=a,CA=b,AB=c,AD、BE、CF$为$\triangle ABC$的内角平分线,记$\triangle DEF、\triangle ABC$的面积分别为$S_{\triangle DEF}、S_{\triangle ABC}$,求证:$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

(第三届上海市中学生数学竞赛题,1958)

证明 由三角形内角平分线性质知

$$AF:FB=b:a,BD:DC=c:b,CE:EA=a:c$$

由定理2,知

$$S_0=\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}+1}{\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{p}{q}+1\right)\left(\frac{r}{s}+1\right)}S$$

所以
$$S_{\triangle DEF}=\frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}+1}{\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{c}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right)}S_{\triangle ABC}=$$

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}S_{\triangle ABC}$$

注 由前面引理4及正弦定理也可推证.

推论 2 设P为$\triangle ABC$内任意一点,$AP、BP、CP$的延长线分别交$BC、CA、AB$于$D、E、F$,若S表示面积,求证:$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,其中等号当且仅当$P$为

$\triangle ABC$ 的重心时成立.

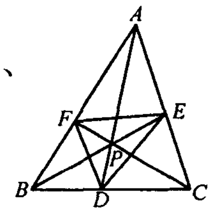


图 10.35

证明 如图 10.35,设 $\frac{AF}{FB}=\lambda,\frac{BD}{DC}=\mu,\frac{CE}{EA}=\rho$,由于 AD、BE、CF 交于点 P,故由塞瓦定理知,$\lambda\mu\rho=1$,由定理2,知

$$S_0=\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}+1}{\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{p}{q}+1\right)\left(\frac{r}{s}+1\right)}S$$

所以
$$S_{\triangle DEF}=\frac{\lambda\mu\rho+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\rho+1)}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{(\lambda+1)(\mu+1)(\rho+1)}S_{\triangle ABC}$$

因为 $\lambda>0,\mu>0,\rho>0$,所以有

$$\lambda+1\geqslant2\sqrt{\lambda},\mu+1\geqslant2\sqrt{\mu},\rho+1\geqslant2\sqrt{\rho}$$

从而
$$(\lambda+1)(\mu+1)(\rho+1)\geqslant8\sqrt{\lambda\mu\rho}=8$$

因此
$$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

而其中等号当且仅当 $\lambda=\mu=\rho=1$,即 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时成立.

推论3 如图 10.36,设 A_0、B_0、C_0 分别位于 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上,若 $AC_0:C_0B=BA_0:A_0C=CB_0:B_0A=m:n$,求证:$\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle ABC$ 有公共的重心.

(南京市1957年中学数学竞赛题)

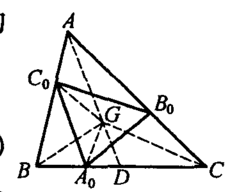


图 10.36

证明 若 $m=n$,则 A_0、B_0、C_0 为 BC、CA、AB 的中点,显然 $\triangle A_0B_0C_0$ 的重心即 $\triangle ABC$ 的重心 G.

若 $m<n$,延长 AG 交 BC 于 D,则 $BD=DC$,于是

$$A_0D=BD-BA_0=\frac{1}{2}BC-\frac{m}{m+n}BC=\frac{n-m}{2(m+n)}BC$$

从而
$$S_{\triangle GA_0D}=\frac{n-m}{2(m+n)}S_{\triangle GBC}=\frac{n-m}{6(m+n)}S_{\triangle ABC}$$

又
$$S_{\triangle GAC_0}=\frac{m}{3(m+n)}S_{\triangle GAB}=\frac{m}{3(m+n)}S_{\triangle ABC}$$

及
$$S_{\triangle A_0C_0B}=\frac{n}{m+n}S_{\triangle A_0AB}=\frac{mn}{(m+n)^2}S_{\triangle ABC}$$

于是
$$S_{\triangle A_0C_0G}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle A_0C_0B}-S_{GAC_0}-S_{\triangle GA_0D}=\left[\frac{1}{2}-\frac{n-m}{6(m+n)}-\frac{m}{3(m+n)}-\frac{mn}{(m+n)^2}\right]S_{\triangle ABC}=$$

$$\frac{m^2-mn+n^2}{3(m+n)}S_{\triangle ABC}$$

又由定理2,知

$$S_{\triangle A_0B_0C}=\frac{m^3+n^3}{(m+n)^3}S_{\triangle ABC}$$

所以
$$S_{\triangle A_0C_0G}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_0B_0C_0}$$

同理可证

$$S_{\triangle A_0B_0G}=S_{\triangle B_0C_0G}=\frac{m^3+n^3}{3(m+n)^3}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A_0C_0G}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_0B_0C_0}$$

故 G 为 $\triangle A_0B_0C_0$ 的重心.

同理可证,当 $m>n$ 时,G 也是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的重心.

推论 4 若 $\triangle A_0B_0C_0$ 为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形则

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2\cos A\cos B\cos CS_{\triangle ABC}$$

(证略,可参见前引理1).

定理 3[①] 任意三角形都存在无数个内接三角形与同一个给定的三角形相似.

证明 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是任意给定的两个三角形,如图 10.37 所示,我们证明 $\triangle ABC$ 存在无数个内接 $\triangle PMN$,满足 $\triangle PMN\backsim\triangle A'B'C'$.

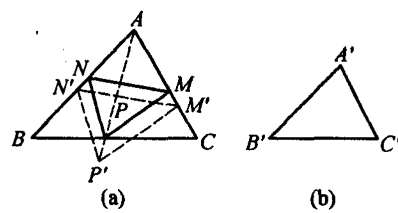


图 10.37

不妨设 $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$,$\angle A'\geqslant\angle B'\geqslant\angle C'$. 按任一方向作一直线与 AC、AB 二边分别相交于 M'、N',使 $\angle CM'N'$ 与 $\angle BN'M'$ 均为钝角(这样的直线 $M'N'$ 显然可作无数条,它们的方向互不相同). 以 $M'N'$ 为一边作 $\triangle P'M'N'\backsim\triangle A'B'C'$,使 P' 和 A 分居于 $M'N'$ 的两侧. 作射线 AP' 交 BC 于 P,过点 P 作线段 $PM/\!/P'M'$ 交 AC 于 M,作 $PN/\!/P'N'$ 交 AB 于 N. 联结 MN,则

$$\triangle PMN\backsim\triangle P'M'N'\backsim\triangle A'B'C'$$

这就表明 $\triangle ABC$ 存在内接 $\triangle PMN\backsim\triangle A'B'C'$. 注意到 $\triangle PMN$ 的边 MN 的方向(即 $M'N'$ 的方向)具有任意性,所以在 $\triangle ABC$ 中,这样的内接 $\triangle PMN$ 有无数个. 命题得证.

① 熊曾润. 浅谈三角形的定形内接三角形的个数[J]. 中学数学教学,2000(2):20.

由这个定理显然可得：

推论 5　任意三角形都存在无数个内接正三角形.

下面我们再探讨任意三角形其内接正三角形的边长何时取最大问题.①

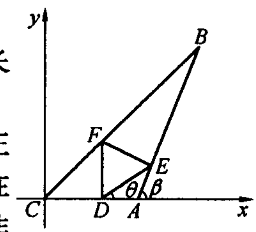


图 10.38

设任意$\triangle ABC$，$\angle B\leqslant\angle C\leqslant\angle A$，$\triangle DEF$ 为其内接正三角形，即点 D、E、F 分别在边 CA、AB、BC 上（包含在$\triangle ABC$ 的顶点上），正$\triangle DEF$ 的边长为 p. 以射线 CA 为非负 x 轴建立如图 10.38 所示的直角坐标系，又设 $A(a,0)$、$B(b,c)$，$\angle BAx=\beta$，$\angle EDx=\theta$，CD 的长为 m. 则 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant\beta$，$E(p\cos\theta+m,p\sin\theta)$、$F(p\cos(\theta+60^\circ)+m,p\sin(\theta+60^\circ))$.

若点 E 与点 A 不重合，则因点 E、F 分别在 AB、BC 上，所以有

$$\begin{cases}\dfrac{p\sin\theta}{p\cos\theta+m-a}=\dfrac{c}{b-a}\\ \dfrac{p\cos(\theta+60^\circ)+m}{p\sin(\theta+60^\circ)}=\dfrac{b}{c}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}p(b-a)\sin\theta=c(p\cos\theta+m-a)\\ c[p\cos(\theta+60^\circ)+m]=bp\sin(\theta+60^\circ)\end{cases}\qquad①$$

若点 E 与点 A 重合，则 $\theta=0^\circ$，$p+m=a$. 式①仍然成立.

从①中消去 m，得

$$p=\frac{2ac}{(2a-b+\sqrt{3}c)\sin\theta+(\sqrt{3}b+c)\cos\theta}$$

令

$$g=\sqrt{(2a-b+\sqrt{3}c)^2+(\sqrt{3}b+c)^2}=\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2+4\sqrt{3}ac-4ab}\qquad②$$

则 $p=\dfrac{2ac}{g\sin(\theta+\alpha)}$，其中 $0^\circ<\alpha<180^\circ$，且

$$\cos\alpha=\frac{2a-b+\sqrt{3}c}{g},\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}b+c}{g}\qquad③$$

从①中解得

$$m=\frac{2a(b-a)\sin\theta-2ac\cos\theta}{g\sin(\theta+\alpha)}+a$$

下面考虑 p 取最大值的情况.

① 焦亚军，郭要红. 三角形的内接最大正三角形[J]. 中等数学，2004(4)：18-19.

(1)若 $0°<\beta<60°$,且$\angle B<\angle C$,此时,可证得 $\sin\alpha>\sin(\alpha+\beta)$.

事实上,只须证

$$\frac{\sqrt{3}b+c}{g}>\frac{\sqrt{3}b+c}{g}\cdot\frac{b-a}{|AB|}+\frac{2a-b+\sqrt{3}c}{g}\cdot\frac{c}{|AB|}$$

即

$$(\sqrt{3}b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab}>\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}ab+\sqrt{3}c^2+ac$$

两边平方、整理、分解因式得

$$(b^2+c^2-2ab)(\sqrt{3}b-\sqrt{3}a-c)>0$$

因为

$$a<|AB|=\sqrt{(b-a)^2+c^2}$$

所以

$$b^2+c^2-2ab>0$$

因为 $0°<\beta<60°$,所以

$$\frac{c}{b-a}<\sqrt{3},b-a>0$$

从而

$$\sqrt{3}b-\sqrt{3}a-c>0$$

因此,当 $0°<\beta<60°$时,总有

$$\sin\alpha>\sin(\alpha+\beta)$$

又由于 $0°\leqslant\theta\leqslant\beta$,所以,当 $\theta=\beta$ 时,$\sin(\theta+\alpha)$取最小值,p 取最大值,且

$$p_{\max}=\frac{2ac}{g\sin(\alpha+\beta)}$$

其中,g、α 值分别由式②、式③确定.此时

$$m=\frac{2a(b-a)}{g\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{c}{|AB|}-\frac{2ac}{g\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{b-a}{|AB|}+a=a$$

内接正三角形最大时的位置,如图 10.39 所示.

(2)若 $60°<\beta\leqslant120°$,且$\angle B<\angle C$,此时,可以证得 $\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$.

证明略.

又由于 $0°\leqslant\theta\leqslant\beta$,所以,当 $\theta=0°$时,$\sin(\theta+\alpha)$取最小值,p 取最大值,且

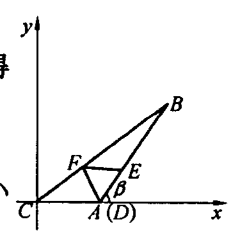


图 10.39

$$p_{\max}=\frac{2ac}{g\sin\alpha}$$

其中,g、α 值分别由式②、式③确定.此时

$$m=-\frac{2ac}{g\sin\alpha}+a$$

内接正三角形最大时的位置,如图 10.40 所示.

(3)若$\angle B=\angle C$或$\beta=60°$,则有

$$b^2+c^2-2ab=0$$

或
$$\sqrt{3}b-\sqrt{3}a-c=0$$

从而
$$\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)$$

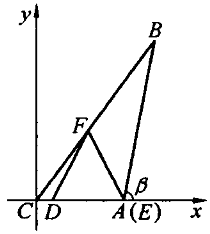


图 10.40

又$0°\leqslant\theta\leqslant\beta$,所以,当$\theta=0°$或$\beta$时,$\sin(\theta+\alpha)$取最小值,$p$取最大值,且

$$p_{\max}=\frac{2ac}{g\sin\alpha}$$

其中,g、α值分别由式②、式③确定.此时

$$m=-\frac{2ac}{g\sin\alpha}+a\text{ 或 }a$$

内接正三角形最大时的位置,如图 10.41(a),(b)所示.

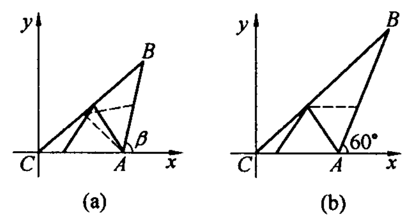


图 10.41

定理 4　三角形的垂足三角形是周长最短的内接三角形.其证明可参见第 3 章第 1 节中例 3.

定理 5　设$\triangle DEF$为$\triangle ABC$的内接三角形,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,l为$\triangle DEF$的周长,则

$$l\geqslant a\cos A+b\cos B+c\cos C \quad ①$$

其中等号当且仅当$\triangle ABC$为锐角三角形,且$\triangle DEF$为垂足三角形时成立.

证明　设R为$\triangle ABC$外接圆的半径,其他字母含义如图 10.42 所示,则

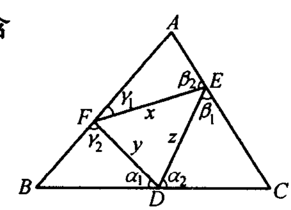


图 10.42

$$(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)=360°$$

由$AF+BF=c=2R\sin C$,可得

$$x\sin B\sin\beta_2+y\sin A\sin\alpha_1=2R\sin A\sin B\sin C$$

同理可得

$$y\sin C\sin\gamma_2+z\sin B\sin\beta_1=2R\sin A\sin B\sin C$$

$$z\sin A\sin\alpha_2+x\sin C\sin\gamma_1=2R\sin A\sin B\sin C$$

易证,上述三个方程构成的方程组,其系数行列式$d=pq\neq0$,其中

$$p=\sin A\sin B\sin C,q=\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1+\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2$$

于是解得

$$x=\frac{2Rp}{q}\sin(\alpha_1+\alpha_2),y=\frac{2Rp}{q}\sin(\beta_1+\beta_2),z=\frac{2Rp}{q}\sin(\gamma_1+\gamma_2)$$

可以证明

$$\frac{1}{q}(\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\sin(\beta_1+\beta_2)+\sin(\gamma_1+\gamma_2))\geqslant 2 \qquad ②$$

所以

$$l=x+y+z\geqslant 4Rp=4R\sin A\sin B\sin C=$$
$$R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

即①成立.同时,由于当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2,\gamma_1=\gamma_2$ 时,②中等号成立.这时,$\triangle ABC$ 必为锐角三角形,而$\triangle DEF$ 为$\triangle ABC$ 的垂足三角形.

第 11 章　1989 ~ 1990 年度试题的诠释

试题 A　已知:在$\triangle ABC$中,$AB > AC$,$\angle A$的一个外角的平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点E,过E作$EF \perp AB$为F.求证:$2AF = AB - AC$.

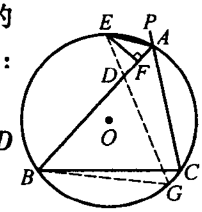


图 11.1

证法 1　如图 11.1,在FB上取点D,使$FD = FA$,联结ED并延长交圆于G,联结BG,则$\triangle EDA$为等腰三角形.即

$$\angle EDA = \angle EAB = \frac{1}{2}\angle PAB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle C)$$

从而
$$\angle EAD = 180^\circ - 2\angle EAB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = \angle BAC$$

于是
$$\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{AC}$$

故
$$BG = AC$$

又
$$\angle G = \angle EAD = \angle EDA = \angle BDG$$

有
$$BD = BG = AC$$

即
$$2AF = AD = AB - AC$$

证法 2　以$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$表示$\triangle ABC$的三个内角,R表示$\triangle ABC$的外接圆的半径,如图 11.2 所示,联结EB.由正弦定理,得

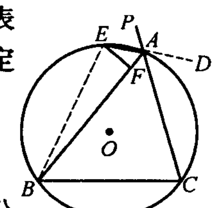


图 11.2

$$AB - AC = 2R(\sin C - \sin B) = 4R\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$

作AE的反向延长线AD,则AD是$\angle A$的另一外角的平分线,故

$$\angle DAC = \frac{\angle C + \angle B}{2}$$

又因$\angle DAC$是圆内接四边形$AEBC$的外角,则

$$\angle EBC = \angle DAC = \frac{\angle C + \angle B}{2}, \angle EBA = \frac{\angle C + \angle B}{2} - \angle B = \frac{\angle C - \angle B}{2}$$

于是,由正弦定理得

$$2R\sin\frac{C-B}{2}=AE$$

从而
$$AB-AC=2AE\cos\frac{C+B}{2}$$

在 Rt△AEF 中

$$\angle EAF=\frac{\angle C+\angle B}{2}$$

故
$$2AF=AB-AC$$

证法 3 如图 11.3,过 E 作 $ED\perp CA$,交 CA 的延长线于 D.有 Rt△AEF ≌ Rt△AED,则 $AF=AD$,联结 EC、EB,可证 Rt△CED ≌ Rt△BEF,有

$$BF=CD$$

则
$$AB-AF=AC+AD=AC+AF$$

从而
$$2AF=AB-AC$$

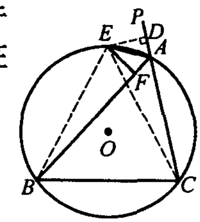


图 11.3

证法 4 如图 11.4,以 EA 为轴作 Rt△EFA 的轴对称图形 Rt△EHA,再以 EH 为轴作 Rt△EHA 的轴对称图形 Rt△EHG,则

$$AG=2AH=2AF$$

联结 EB、EC,有 $\angle EBA=\angle ECG$.证明△BEA ≌ △CEG,即得结论

$$AB-AC=GC-AC=AG=2AF$$

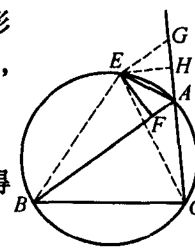


图 11.4

证法 5 如图 11.5,过点 E 作 $EG/\!/AB$ 交圆于 G,联结 GA、EC.可证△GEA ≌ △CAE.这可由

$$\angle EGA=\angle ACE$$

及
$$\angle EAC=180^\circ-\angle EAT=180^\circ-\angle GBA=\angle AEG$$

AE 公用证得(T 为 CA 延长线上的点).于是 $GE=CA$.

在等腰梯形 $GBAE$ 中

$$AB-EG=2AF$$

故
$$AB-AC=2AF$$

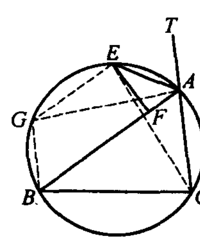


图 11.5

证法 6 如图 11.6,在 FB 上取点 D,使 $FD=FA$.联结 ED 延长交圆于 G,

联结 AG、EC，有 $\triangle ADG \backsim \triangle EAC$，且 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AG}$，得 $AD=\dfrac{AE\cdot BC}{EC}$. 联结 EB，据托勒密定理即得证. 即在四边形 $AEBC$ 中，有

$$AB\cdot EC=AE\cdot BC+BE\cdot AC$$

于是 $2AF=AD=\dfrac{AE\cdot BC}{EC}=\dfrac{AB\cdot EC-BE\cdot AC}{EC}=AB-AC$

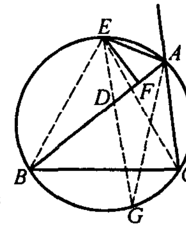


图 11.6

证法 7　如图 11.7，作 $\angle A$ 的平分线 AD，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D，则 ED 为外接圆直径. 设 ED 中点为 O，联结 AO 延长交圆 O 于 G，联结 DG、BG. 设 $\angle GAD=\theta$，则有

$$AB=2R\cos\left(\frac{A}{2}-\theta\right)$$

$$AC=2R\cos\left(\frac{A}{2}+\theta\right)$$

$$AF=2R\sin\theta\sin\frac{A}{2}$$

经计算即证明结论.

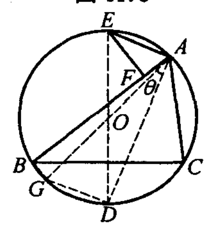


图 11.7

证法 8　如图 11.8，联结 BE，由已知，易得

$$\angle EAF=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),\angle EBA=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$$

注意到恒等式

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

得

$$\sin C-\sin B=\frac{\sin A\sin(C-B)}{\sin C+\sin B}$$

故

$$AB-AC=2R\cdot\frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}\cdot 2\sin\dfrac{C-B}{2}\cos\dfrac{C-B}{2}}{2\sin\dfrac{C+B}{2}\cos\dfrac{C-B}{2}}=$$

$$4R\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{B+C}{2}=4R\sin\angle EBA\cos\angle EAF=2AE\cos\angle EAF=2AF$$

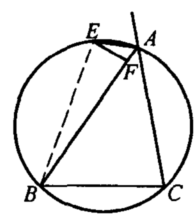


图 11.8

证法 9　（此证法及以下 4 种证法由江苏东海中学周文海、柳余生给出）.

如图 11.9，延长 FA 到 M，使 $AM=AC$. 联结 BE、CE、EM. 则由 $AC=AM$，$AE=AE$，$\angle 1=\angle 2$ 知 $\angle MAE=\angle CAE$，故 $\triangle AEM\cong\triangle AEC$. 由 $\angle 4=\angle 5$ 及

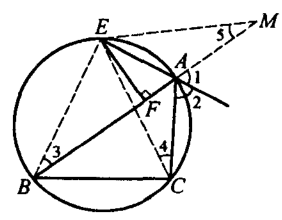


图 11.9

$\angle 3=\angle 4$ 知 $\angle 3=\angle 5$,即 $BE=EM$.而 $EF\perp BM$,$BF=FM$,则

$$AB-AF=AM+AF=AF+AC$$

故有

$$2AF=AB-AC$$

证法 10 如图 11.10,在 AB 上截 $AG=AC$.联结 CG 并延长交圆于 H,联结 BH,作 $HI\perp BG$,I 为垂足.由 $AC=AG$,AE 为 $\angle A$ 的外角平分线,从而知 $AE/\!/CG$,即

$$\angle 1=\angle 6=\angle 3=\angle 4=\angle 5$$

又

$$\angle 1=\angle 2$$

则

$$\angle 2=\angle 5, HB=HG$$

于是

$$\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{HE}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BH}+\overset{\frown}{HE}$$

则

$$\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{AE}$$

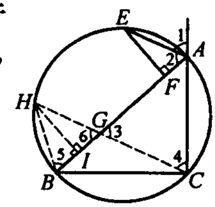


图 11.10

在 Rt$\triangle BHI$ 与 Rt$\triangle AEF$ 中,$BH=AE$.则 Rt$\triangle BHI\cong$ Rt$\triangle AEF$,$BI=AF$.又 $BI=IG$,即 $GB=2AF$.故得.

证法 11 如图 11.11,过点 E 作 $EI/\!/AB$ 交圆 O 于 I,延长 EF 交圆 O 于 G,联结 EO 交圆 O 于 H,再联结 IH 交 AB 于 J.因 EH 为圆的直径,则四边形 $EIJE$、$FJHG$ 为矩形,且 $IBAE$ 为等腰梯形.则 $FJ=GH$,Rt$\triangle IJB\cong$ Rt$\triangle EFA$,$JB=AF$.

又由 E、B、H、F 四点共圆,知 $\angle GEH=\angle ABC$,故 $GH=AC$(圆周角相等,则所对的弦相等),即

$$2AF=AB-FJ=AB-AC$$

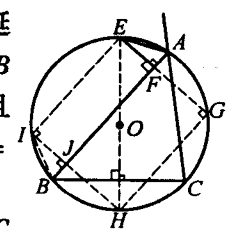


图 11.11

证法 12 如图 11.12,由证法 3 知:$EB=EC$.设 $EO\perp BC$ 于 K,且交圆于 J,延长 EF 交圆于 I,联结 IJ.作 $OD\perp AB$,$OH\perp EI$,D、H 为垂足.则 $OH \perp\!\!\!\!\!= DF \perp\!\!\!\!\!= \frac{1}{2}IJ$.

而 E、F、K、B 四点共圆,则

$$\angle JEI=\angle ABC$$

即

$$OH=DF=\frac{1}{2}AC$$

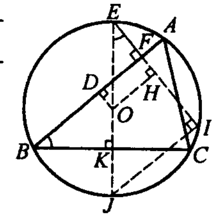


图 11.12

故
$$AD - DF = AF$$
即
$$\frac{1}{2}(AB - AC) = AF$$
故得.

证法13　如图11.13,联结 EO 分别交 BC、$\overset{\frown}{BC}$ 于 K、J. 则 $EK \perp BC$,且 $BK = KC$,$\overset{\frown}{BJ} = \overset{\frown}{JC}$.

作 $CG \perp AJ$ 并延长 CG 交 AB 于 H,则 AG 垂直平分 HC. 即
$$KG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}(AB - AH) = \frac{1}{2}(AB - AC)$$
下面只须证明 $AFKG$ 为一平行四边形,因 E、B、K、F 四点共圆,则 $\angle BEJ = \angle BFK$.

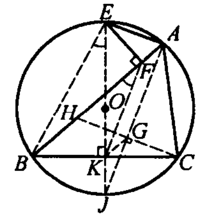


图11.13

又因 $\angle BEJ = \angle BAJ$,则 $\angle BFK = \angle BAJ$. 故 $FK // AG$,$AFKG$ 为平行四边形. 从而
$$2AF = AB - AC$$

证法14　(此证法及以下证法由绍兴柯桥中学陈炳荣给出).

如图11.14,过 C 作 $CN // AE$ 交外接圆于 N,交 AB 于 M,联结 BN.则
$$\angle 6 = \angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = \angle 4 = \angle 5$$
即
$$AC = AM, BN = MN$$

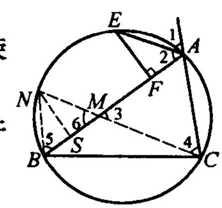


图11.14

过 N 作 $NS \perp BM$ 交 BM 于 S. 由 $\angle 5 = \angle 2$,知 $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BE}$,则 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BN}$. 从而 $AE = BN$,则 $\mathrm{Rt}\triangle BNS \cong \mathrm{Rt}\triangle AEF$. 则 $BS = AF$,故
$$AB - AC = AB - AM = BM = 2BS = 2AF$$

证法15　如图11.15,过 B 作 $BM // AE$ 交外接圆于 N,交 AC 的延长线于 M. 联结 NC、EN,则
$$\angle 5 = \angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = \angle 4$$
即
$$AB = AM, MN = NC = AE$$
作 $NH \perp CM$ 交 CM 于 H,则

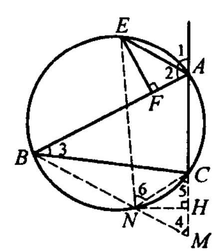


图11.15

$$\mathrm{Rt}\triangle AEF \cong \mathrm{Rt}\triangle CNH$$

所以
$$AF = CH = \frac{1}{2}MC$$

所以
$$AB - AC = AM - AC = MC = 2AF$$

证法 16 如图 11.16,过 C 作 $CD /\!/ AE$ 交外接圆于 D,联结 ED、BD,则 $AC = ED$,由

$$\angle 2 = \angle 1 = \angle 3 = \angle 4$$

知 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AD}$,则 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AE}$,故 $ED /\!/ AB$.

则四边形 $ABDE$ 为圆内接等腰梯形,而 $EF \perp AB$.故由对称性显然有

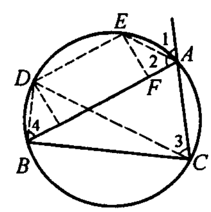


图 11.16

$$AB - DE = 2AF$$

即
$$AB - AC = 2AF$$

证法 17 (解析法)如图 11.17,因已知 $\angle 1 = \angle 2$,故 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{EC}$,所以点 E 在线段 BC 的垂直平分线上.如图 11.17 建立坐标系,不妨设圆半径为 1,$A(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$、$B(-\cos\theta_1, \sin\theta_1)$、$C(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$,其中

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

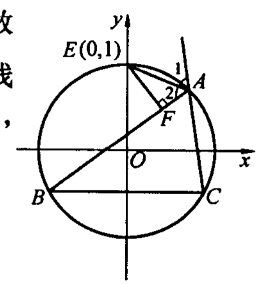


图 11.17

则
$$|AB| = \sqrt{(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)^2 + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2} = \sqrt{2 + 2\cos(\theta_1 + \theta_2)} = 2\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2} = 2\sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

又因
$$|AB| > |AC|$$

则
$$\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} > \sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

又直线 EF 的方程是

$$(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)x + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)y + \sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 0$$

则
$$|AF| = \frac{|1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 - \sin\theta_2|}{2\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} =$$

$$\frac{\left|2\cos^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|}{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}=$$

$$\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

综上可知
$$|AB|-|AC|=2|AF|$$

注　(1)在上述的许多的解法中,均隐含了 $BE=EC$ 这一点,其实,这一点恰是当时的初中平面几何教材第二册 96 页中习题第 22 题[①]:"AE 是$\triangle ABC$ 外角的平分线,与三角形的外接圆交于点 E,求证:$EB=EC$."

(2)恰当改变此试题部分条件,可得出新命题[②]:

(i)改外角平分线为内角平分线.

命题 1　已知在$\triangle ABC$ 中,若 $AB>AC$,$\angle A$ 的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 E,过 E 作 $EF\perp AB$,垂足为 F.那么 $2BF=AB-AC$.

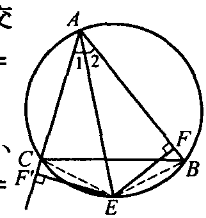


图 11.18

事实上,如图 11.18 所示,作 $EF'\perp AC$ 于 F',联结 EC、EB.由$\angle 1=\angle 2$ 知 $EF'=EF$,$\angle F'CE=\angle FBE$,$\angle EF'C=\angle BFE=90°$,故$\triangle CF'E\cong\triangle BFE$,即 $CF'=BF$.又 $AF'=AF$,故 $2BF=AB-AC$.

(ii)改作夹边的垂线为作对边的垂线.

命题 2　已知在$\triangle ABC$ 中,若 $AB>AC$,$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 E,过 E 作 BC 边的垂线交外接圆于 F.那么 AF 平分$\angle A$.

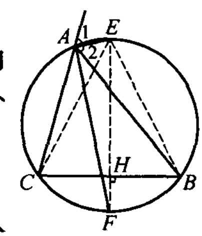


图 11.19

事实上,如图 11.19 所示,联结 EC、EB.由$\angle 1=\angle EBC=\angle 2=\angle ECB$ 知 $EC=EB$.又 $EF\perp BC$,则$\angle CEF=\angle BEF$.从而 $\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{BF}$,即 AF 平分$\angle BAC$.

(iii)改作垂线为作圆的切线.

命题 3　已知在$\triangle ABC$ 中,若 $AB>AC$,$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 E,过 E 作圆的切线.那么,此切线平行于 BC.

事实上,如图 11.20,作$\angle BAC$ 的平分线交圆于点 P,联结 EP 交 BC 于 H.从而由

①、②何鼎潮,边学平.一道源于教材的竞赛题[J].中学教研(数学),1990(3):26-27.

$$\angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$$

知
$$\angle 2+\angle 3=90^\circ$$

于是知 PE 是直径. 又 $\angle 3=\angle 4$ 知 $\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{PB}$. 从而 $EP\perp BC$. 因 EF 是切线知 $EP\perp EF$, 故 $EF/\!/BC$.

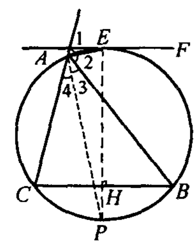


图 11.20

(3)可以将原试题结论与(2)中命题1统一起来.①

设 E 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上的任一点, 自 E 作 $EF\perp AB$ 于 F, 如图 11.21 所示, 试求 $AB-AC$ 与 AF 间的关系.

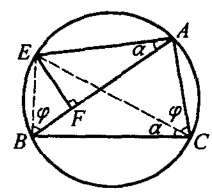


图 11.21

令 $\angle ABE=\varphi$, 则在 $\triangle ABE$ 中有

$$\frac{AE}{\sin\varphi}=\frac{AB}{\sin\angle AEB}=\frac{AB}{\sin C}$$

而在 $\triangle ACE$ 中又有

$$\frac{AE}{\sin\varphi}=\frac{AC}{\sin\angle AEC}=\frac{AC}{\sin B}$$

故
$$AB-AC=\frac{AE}{\sin\varphi}(\sin C-\sin B)$$

因 $\sin C-\sin B=2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}=2\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}$

仍用 θ 表 $\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$, 则有

$$AB-AC=\frac{2AE}{\sin\varphi}\sin\theta\sin\frac{A}{2}$$

令 $\angle BAE=\alpha$, 则有 $AF=AE\cos\alpha$, 故

$$AB-AC=2AF\cdot\frac{\sin\theta\sin\frac{A}{2}}{\sin\varphi\sin\alpha}\qquad ①$$

其中

$$\varphi=\angle EBA=\angle ECA=\angle C-\alpha\qquad ②$$

这就表明:在反映 AF 与二边之差($AB-AC$)的关系式①中,只含一个决定点 E 位置的参数 α. 因此,它就是我们所寻求的普遍结论.

特别地,当 AE 为 $\angle A$ 的外角平分线时

$$\alpha=90^\circ-\frac{\angle A}{2},\varphi=\angle C-90^\circ+\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\angle\theta$$

从而有
$$AB-AC=2AF$$

① 李长明. 应用正弦定理证明几何题的优越性[J]. 中学数学,1991(2):1-2.

当 AE 为 $\angle A$ 的平分线时

$$\alpha = -\frac{\angle A}{2}, \varphi = \angle C + \frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}(\angle C + 180^\circ - \angle B) = 90^\circ + \theta$$

从而
$$AB - AC = 2AF\tan\theta\tan\frac{A}{2}$$

而
$$AF\tan\frac{A}{2} = EF, EF\tan\theta = BF$$

故
$$AB - AC = 2BF$$

从上也可看出：三角形中的正弦定理是反映三角形边角关系的一个重要定理，借助于它，我们可将原试题普遍化，后面，我们还将介绍由此试题，启发我们关注共点两弦折弦中点定理、共点三弦夹角定理，圆内接凸 n 边形的正弦定理等.

试题 B　如图 11.22，在凸四边形 $ABCD$ 中，AB 与 CD 不平行，圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P，圆 O_2 过 C、D 且与边 AB 相切于 Q，圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E、F. 求证：EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC /\!/ AD$.

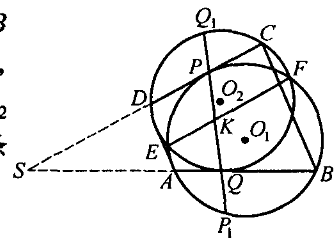


图 11.22

证法 1　设 EF 与 PQ 交于点 K. 首先证明

$$PK = KQ \Leftrightarrow DP \cdot PC = AQ \cdot BQ \quad ①$$

事实上，延长 PQ 分别交圆 O_1 及圆 O_2 于点 P_1 和 Q_1，如图 11.22 所示，则由圆内相交弦的定理知

$$KE \cdot KF = PK \cdot KP_1 = QK \cdot KQ_1$$

所以
$$KP = KQ \Leftrightarrow KP_1 = KQ_1 \Leftrightarrow Q_1P = P_1Q \Leftrightarrow Q_1P \cdot PQ = P_1Q \cdot QP \Leftrightarrow DP \cdot PC = AQ \cdot QB$$

即式①成立.

其次只要证明

$$DP \cdot PC = AQ \cdot QB \Leftrightarrow AD /\!/ BC$$

为此，延长 CD 及 AB 使之相交于 S，那么

$$DP = SP - SD, PC = SC - SP, AQ = SQ - SA, BQ = SB - SQ$$

我们可得

$$DP \cdot PC = AQ \cdot QB \Leftrightarrow -SP^2 - SC \cdot SD + SP(SC + SD) = -SQ^2 - SA \cdot SB + SQ(SA + SB) \quad ②$$

由于
$$SP^2 = SA \cdot SB, SQ^2 = SC \cdot SD$$

所以②等价于

$$SP(SC+SD)=SQ(SA+SB)\Leftrightarrow SA\cdot SB(SC+SD)^2=SC\cdot SD(SA+SB)^2\Leftrightarrow$$
$$\frac{SA}{SB}=\frac{SD}{SC}\Leftrightarrow AD\parallel BC$$

证毕.

证法 2 如图 11.23,第一步证明

$$BC\parallel AD\Leftrightarrow PD\cdot PC=QA\cdot QB$$

如图,分别延长 CD 与 BA,记它们的交点为 G.令

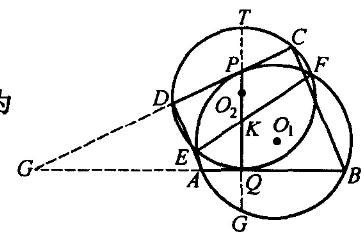


图 11.23

$$a=GA,la=GB,q=GQ$$
$$b=GD,tb=GC,p=GP$$

显然 l、$t>1$,且

$$BC\parallel AD\Leftrightarrow l=t$$

又圆 O_1 与 CD 相切于 P,有

$$GP^2=GA\cdot GB$$

即 $$p=\sqrt{l}a$$

同理 $$q=\sqrt{t}b$$

于是 $$PD\cdot PC=\sqrt{l}(t+1)ab-la^2-tb^2$$
$$QA\cdot QB=\sqrt{t}(l+1)ab-la^2-tb^2$$

从而 $$PD\cdot PC=QA\cdot QB\Leftrightarrow\sqrt{l}(t+1)=\sqrt{t}(l+1)$$

由 l、$t>1$,易知

$$\sqrt{l}(t+1)=\sqrt{t}(t+1)\Leftrightarrow l=t$$

因此 $$BC\parallel AD\Leftrightarrow PD\cdot PC=QA\cdot QB$$

第二步证明

$$PD\cdot PC=QA\cdot QB\Leftrightarrow KP=KQ(\text{即 } EF \text{ 平分线段 } PQ)$$

延长 PQ 分别交圆 O_1、O_2 于 S、T,则由相交弦定理可知

$$PD\cdot PC=PT\cdot PQ,QA\cdot QB=QS\cdot PQ$$

因此 $$PD\cdot PC=QA\cdot QB\Leftrightarrow PT=QS$$

因为 EF 为两圆的公共弦,再由相交弦定理可知

$$KP\cdot KS=KE\cdot KF=KQ\cdot KT$$

即 $$KP(KQ+QS)=KQ(KP+PT)$$

于是 $$KP\cdot QS=KQ\cdot PT$$

从而 $$PT=QS\Leftrightarrow KP=KQ$$

所以 $$PD\cdot PC\cdot=QA\cdot QB\Leftrightarrow KP=KQ$$

综合上述两步,命题得证.

证法3　如图11.23,设 PQ 与 EF 相交于 K,直线 PQ 与圆 O_1、圆 O_2 的另一交点分别为 S、T.由相交弦定理,有

$$KP\cdot KS=KE\cdot KF=KQ\cdot KT$$

即 $$KP(KQ+QS)=KQ(KP+PT)$$

亦即 $$KP\cdot QS=KQ\cdot PT$$

于是 $$KP=KQ(\text{即 }EF\text{ 平分 }PQ)\Leftrightarrow QS=PT\Leftrightarrow QS\cdot PQ=PT\cdot PQ\Leftrightarrow$$
$$QA\cdot QB=PC\cdot PD$$

设 CD、BA 相交于 G,记

$$GA=a,GB=b,GC=c,GD=d$$

(i)充分性:设 $AD/\!/BC$,则

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{c},ac=bd,\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$$

由圆幂定理 $$GQ=\sqrt{GD\cdot GC}=\sqrt{cd},GP=\sqrt{ab}$$

故 $$PC=c-\sqrt{ab},PD=\sqrt{ab}-d$$
$$QB=b-\sqrt{cd},QA=\sqrt{cd}-a$$

所以 $$PC\cdot PD=(c-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-d)=(c+d)\sqrt{ab}-ab-cd=$$
$$(a+b)\sqrt{cd}-ab-cd=(b-\sqrt{cd})(\sqrt{cd}-a)=QA\cdot QB$$

从而 $$KP=KQ$$

(ii)必要性:若 $KP=KQ$,则

$$PC\cdot PD=QA\cdot QB$$

即 $$(c-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-d)=(b-\sqrt{cd})(\sqrt{cd}-a)$$

亦即 $$(c+d)\sqrt{ab}=(a+b)\sqrt{cd}$$

所以 $$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{ab}{cd}=\frac{4ab}{4cd}=\frac{(a+b)^2-4ab}{(c+d)^2-4cd}=\left(\frac{b-a}{c-d}\right)^2$$

因 $b>a,c>d$,从而

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b-a}{c-d}=\frac{b}{c}=\frac{a}{d}$$

所以 $$AD/\!/BC$$

注　此题由广州大学吴伟朝先生提供,在相同的题设条件下,吴先生还在

《数学通讯》1991 年第 7 期中提供了问题征解题第 21 题：

在凸四边形 $ABCD$ 中，圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P，圆 O_2 过 C、D 且与边 AB 相切于 Q，圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E、F. 求证：若 $BC /\!/ AD$，则 EF、AC、BD 三直线共点.

证法 1 （由北京刘彤给出）当 $AB /\!/ CD$ 时，由对称性易知命题成立.

当 AB 与 CD 相交于点 S 时，如图 11.24 所示，设 AC 交圆 O_1 于点 M（靠近点 C 的交点），BD 交圆 O_2 于点 N（靠近点 B 的交点）. 由切割线定理得

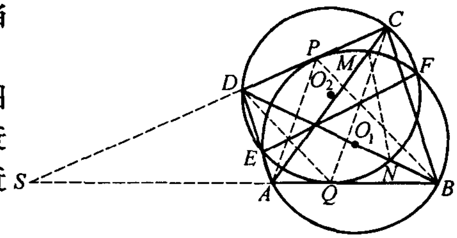


图 11.24

$$SP^2 = SA \cdot SB, SQ^2 = SC \cdot SD$$

再 $AD /\!/ BC$ 得

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC}$$

故由上面三式可得

$$SA \cdot SQ = SD \cdot SP, SQ \cdot SB = SC \cdot SP$$

即知 A、Q、P、D 四点共圆及 B、Q、P、C 四点共圆，所以

$$\angle PAB = \angle QDC, \angle PBA = \angle QCD$$

从而

$$\angle APB = \angle DQC$$

故 $\angle AMB = \angle CND$，即 M、N、B、C 四点共圆，故

$$\angle DNM = \angle MCB = \angle ACB$$

再由 $AD /\!/ BC$ 知 $\angle ACB = \angle CAD$，从而 $\angle DNM = \angle CAD$，即 M、N、A、D 四点共圆，记此圆为圆 O_3.

考虑圆 O_1、圆 O_2 和圆 O_3，由根轴定理知 EF、AM、DN 三直线共点，即 EF、AC、BD 三直线共点.

证法 2 （由黑龙江梁剑峰给出）如图 11.25，分别延长 CD 和 BA 相交于点 S（当 CD 与 BA 平行时，由对称性易知命题成立）. 设 $a = SA$，$d = SD$，$p = SP$，$q = SQ$.

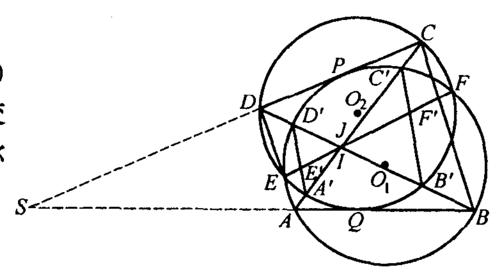


图 11.25

由 $AD /\!/ BC$ 得

$$SC = t \cdot d, SB = t \cdot a, t > 1$$

由切割线定理得

$$SP^2 = SA \cdot SB$$

即

$$p = \sqrt{t}a$$

同理可得

$$q = \sqrt{t}d$$

所以

$$PD \cdot PC = (p - d)(td - p) = \sqrt{t}(t+1)ad - ta^2 - td^2$$

$$QA \cdot QB = (q - a)(ta - q) = \sqrt{t}(t+1)ad - ta^2 - td^2$$

故有

$$PD \cdot PC = QA \cdot QB \quad ①$$

设 AC 分别交圆 O_2 和圆 O_1 于另一点 A' 和 C'，BD 分别交圆 O_2 和圆 O_1 于另一点 B' 和 D'，AC 与 EF 相交于 I，BD 与 EF 相交于 J. 由切割线定理得

$$CP^2 = CC' \cdot CA \quad ②$$

$$DP^2 = DD' \cdot DB \quad ③$$

$$AQ^2 = AA' \cdot AC \quad ④$$

$$BQ^2 = BB' \cdot BD \quad ⑤$$

由②×③，④×⑤和①得

$$CC' \cdot DD' = AA' \cdot BB' \quad ⑥$$

由相交弦定理得

$$AI \cdot IC' = EI \cdot FI = A'I \cdot IC$$

即

$$AI(IC - CC') = IC(IA - AA')$$

所以

$$AI \cdot CC' = IC \cdot AA' \quad ⑦$$

同理可得

$$DJ \cdot BB' = BJ \cdot DD' \quad ⑧$$

由⑦×⑧及⑥得

$$AI \cdot BJ = IC \cdot DJ$$

所以

$$\frac{AI}{IC} = \frac{DJ}{BJ} \quad ⑨$$

设直线 EF 分别与 $A'D'$ 和 $B'C'$ 相交于 E' 和 F'，由 $A'D' /\!/ B'C'$ 得

$$\frac{A'I}{IC'} = \frac{E'I}{F'I}, \frac{D'J}{B'J} = \frac{E'J}{F'J}$$

再由⑨得

$$\frac{E'I}{F'I} = \frac{E'J}{F'J}$$

从而得

$$E'I = E'J$$

故 I 与 J 重合,即 EF、AC、BD 三直线共点.

证法 3 (由吴伟朝自己给出)由第五届(1990 年)全国中学生数学冬令营第 1 题(该题由吴伟朝提供并解答)的证明过程知,由 $BC /\!/ AD$ 可推得 A、D、P、Q 四点共圆(记此圆为圆 O_3)及 B、C、P、Q 四点共圆(记此圆为圆 O_4),如图 11.26 所示.

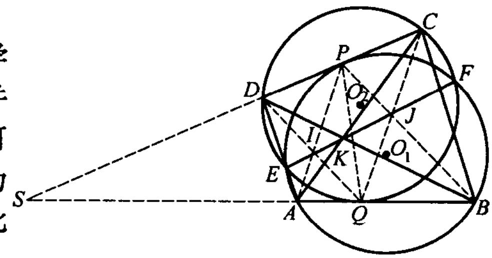


图 11.26

由根轴定理知 AP、DQ、EF 三直线共点于 I(考虑圆 O_1,圆 O_2 和圆 O_3),BP、CQ、EF 三直线共点于 J(考虑圆 O_1,圆 O_2 和圆 O_4).设 AC 与 BD 相交于点 K,则由帕波斯定理知 I、K、J 三点共直线,故 IJ、AC、BD 三直线共点,从而三直线 EF、AC、BD 共点.

证法 4 (由河南赵振华给出)如图 11.27,设 PQ 交 EF 于点 O,AC 交 BD 于点 N,过 N 作 $MS /\!/ BC$,则易得 $MN = NS$.作 $O_1G \perp AB$ 及 $O_2H \perp CD$,延长 PQ 分别交圆 O_1 和圆 O_2 于 K、L.设 R 为 QS 的中点,联结 RN、ON、OR、O_1O_2.设 O_3 为 O_1P 与 O_2Q 的交点,两直线 AB、DC 相交于 Z(当 $AB /\!/ CD$ 时易知命题成立).

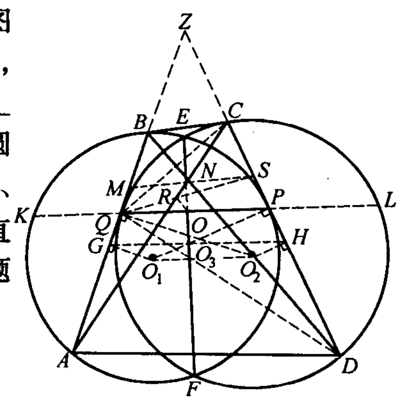


图 11.27

由 $BC /\!/ AD$ 可推得

$$\frac{ZC}{ZB}=\frac{ZD}{ZA}\Rightarrow\frac{ZC^2}{ZB^2}=\frac{ZC\cdot ZD}{ZB\cdot ZA}=\frac{ZQ^2}{ZP^2}\Rightarrow\frac{ZC}{ZB}=\frac{ZQ}{ZP}\Rightarrow$$

$$\frac{ZD}{ZA}=\frac{ZQ}{ZP}\Rightarrow\frac{PQ}{BC}=\frac{AD}{PQ}$$

另外由 B、C、P、Q 和 A、D、P、Q 分别四点共圆可知四边形 $BCPQ$ 与四边形 $PQAD$ 的四个内角对应相等,且

$$\angle QDP=\angle QDC=\angle CQB$$

由此可知四边形 $BCPQ$ 与四边形 $PQAD$ 相似,所以

$$BQ\cdot QA=CP\cdot PD$$

从而

$$KQ\cdot PQ=PL\cdot PQ$$

即得
$$KQ = PL$$
又
$$OP \cdot OK = OE \cdot OF = OQ \cdot OL$$
即
$$OP(OQ + KQ) = OQ(OP + PL), OQ \cdot PL = OP \cdot KQ$$
从而 $OP = OQ$，即 EF 过线段 PQ 的中点 O.

由 $BC /\!/ MS /\!/ AD$ 易得
$$MS = \frac{2AD \cdot BC}{AD + BC}$$
又由 G、H 分别为 AB、CD 的中点知 $GH = \dfrac{AD + BC}{2}$(因为 $BC /\!/ AD$)，所以 $MS \cdot GH = AD \cdot BC$，从而 $MS \cdot GH = PQ^2$. 所以四边形 $MSPQ \backsim$ 四边形 $PQGH$，故
$$\frac{MQ}{PH} = \frac{SP}{GQ}, \frac{NR}{PH} = \frac{OR}{GQ} \cdot \frac{NR}{OR} = \frac{PH}{GQ} = \frac{O_2O_3}{O_1O_3}$$
又
$$\angle O_1O_3O_2 = 180° - \angle Z = \angle ORN$$
由此知
$$\triangle NRO \backsim \triangle O_2O_3O_1$$
故
$$\angle ONR = \angle O_1O_2O_3$$
又由 $O_2O_3 \perp AB$，$RN /\!/ MQ$ 知 $O_2O_3 \perp NR$，从而 $NO \perp O_1O_2$，$EF /\!/ NO$，故直线 EF 与直线 NO 重合，即 N 在直线 EF 上，从而 EF、AC、BD 三直线共点.

吴伟朝先生还指出，他还编拟了一道与此征解题有关的另一题：

在平面凸四边形 $ABCD$ 中，圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P，圆 O_2 过 C、D 且与边 AB 相切于 Q. 记 α_1 是半径 O_1B 绕点 O_1 按逆时针方向旋转到 O_1A 时所转过的最小角度，α_2 是半径 O_2D 绕点 O_2 按逆时针方向旋转到 O_2C 时所转过的最小角度，求证：$\alpha_1 = \alpha_2$ 的充分且必要条件是 $BC /\!/ AD$.

取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 180°$ 时，即得 1984 年第 25 届 IMO 第 4 题，这题是此 IMO 试题的推广，并且这道题发表在湖南教育出版社出版的《数学竞赛》第 10 辑的征解问题栏中为第 12 题.

试题 C1　在 $\triangle ABC$ 中，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$\angle C \geqslant 60°$. 证明
$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 4 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \qquad ①$$

证明　由正弦定理及三角公式有
$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (\sin A + \sin B)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) =$$
$$4 + \frac{(\sin A - \sin B)^2}{\sin A \sin B} + \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} =$$

$$4+\frac{8\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}+\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin C}=$$

$$4+\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=$$

$$4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}-\frac{2\sin^2\frac{A-B}{4}}{\sin\frac{C}{2}}=$$

$$4+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+2\sin^2\frac{A-B}{4}\left(\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

可见,为证①,只须证明

$$\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \qquad ②$$

因为

$$\cos^2\frac{A-B}{2}>\cos^2\frac{A+B}{2}=\sin^2\frac{C}{2}$$

所以,式②又等价于

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2} \qquad ③$$

由于$\angle C\geqslant 60^\circ$,所以

$$\sin\frac{C}{2}\geqslant\frac{1}{2},8\sin^3\frac{C}{2}\geqslant 1$$

故有 $8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{4}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$

可见不等式①成立.

注 不等式①可以改进[①],即已知在$\triangle ABC$中,若$\angle C\geqslant 60^\circ$,$R$是外接圆半径,那么

$$\frac{(a-b)^2}{R^2(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a})(1+\frac{a}{b}-\frac{c}{b})}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad ②$$

① 陈大道.关于一道竞赛题[J].中学教研(数学),1990(10):23-24.

证法1 不等式②可化为

$$\frac{ab(a-b)^2}{R^2(a+b+c)(a+b-c)}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,可得

$$\frac{ab(a-b)^2}{R^2(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{4\sin A\sin B(\sin A-\sin B)^2}{(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)}$$

易证

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

因此,式②等价于

$$\frac{4\sin A\sin B(\sin A-\sin B)^2}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin A\sin B(\sin A-\sin B)^2}{\sin A\sin B\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

即

$$\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad ③$$

若$\angle A=\angle B$,那么上式显然成立等号,从而式②成立等号;若$\angle A\neq\angle B$,那么式③等价于

$$\sin\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{A-B}{4}\cos^2\frac{C}{2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$4\sin^3\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A-B}{4}\cos\frac{A-B}{4}\right)^2-2\sin^2\frac{A-B}{4}\cos^2\frac{C}{2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}\sin^2\frac{A-B}{4}-\cos^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A-B}{4}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}-\cos^2\frac{C}{2}\geqslant 0 \qquad ④$$

由于

$$30^\circ\leqslant\frac{C}{2}<90^\circ,0<\left|\frac{A-B}{4}\right|<30^\circ$$

因此 $$8\sin^3\frac{C}{2}\geqslant 1,\cos^2\frac{A-B}{4}>\cos^2 30°=\frac{3}{4}$$

$$-\cos^2\frac{C}{2}\geqslant -\cos^2 30°=-\frac{3}{4}$$

因此④中成立严格不等号,从而②中也成立严格不等号.

证法 2 原不等式可化为

$$\frac{(a-b)^2}{2R^2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \quad ⑤$$

由正弦定理、余弦定理,可得

$$\frac{(a-b)^2}{2R^2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\frac{2(\sin A-\sin B)}{1+\cos C}=\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\frac{1+\cos C}{2}}$$

因此式⑤等价于

$$\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\frac{1+\cos C}{2}}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\Leftrightarrow\frac{(\sin A-\sin B)^2}{\cos^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

(以下同证法 1)

从以上证明可以看出,不等式②稍优于原题中的不等式①.

试题 C2 平面上任意 7 点,过其中共圆的 4 点作圆,问最多能作出多少个不同的圆?

解 如图 11.28,设 AD、BE、CF 为锐角$\triangle ABC$ 的三条高,H 为垂心,则过 A、B、C、D、E、F、H7 点中的 4 点作圆,共可作出 6 个不同的圆.

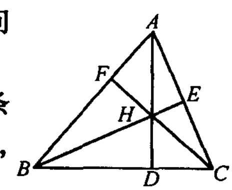


图 11.28

下面用反证法证明所求的最大值就是 6.如果能作出 7 个不同的圆,则 7 点中的每点都在 4 个圆上.这是因为

(i)过 2 个固定点的圆至多两个.若有三个,则两两之间没有其他公共点,而除了 2 个固定点之外每圆上还有 2 点,这样一来就共有 8 点了.

(ii)过 1 个固定点的圆至多 4 个.若有 5 个,则每两圆至多还有一个交点,且由(i)知 5 圆中的任何 3 圆不能再交于另外一点.这样一来,至少需要 10 点.

(iii)每圆上有 4 点,7 圆上共有 28 点(包括重复计数),但由(ii)知每点至多在 4 个圆上,从而 7 点每点都恰在 4 个圆上.

如图 11.29,设 7 点为 A、B、C、D、E、F、G,以 G 为中心进行反演变换,则过点 G 的 4 个圆变为 4 条彼此相交的直线,另外三圆还应变为圆.设像点为 A'、B'、C'、D'、E'、F'.这 6 点中的任何 4 点要共圆,其中 3 点不能在一条直线上,故另外的三个 4 点圆只可能是 $A'B'D'F'$、$B'C'E'F'$ 和 $A'C'D'E'$.但 D' 在 $\triangle A'C'E'$ 之内,当然不能共圆,矛盾.从而证明了所求的最大值为 6.

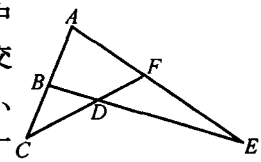


图 11.29

这一年度,还于 1989 年 12 月 10 日举行了全国高中数学冬令营选拔赛,不妨记这一级试题为 C'.

试题 C′　在"筝形"$ABCD$ 中,$AB = AD$,$BC = CD$,经 AC、BD 的交点 O 任作两条直线,分别交 AD 于 E,交 BC 于 F,交 AB 于 G,交 CD 于 H.GF、EH 分别交 BD 于 I、J.求证:$IO = OJ$.

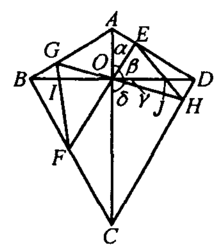


图 11.30

证法 1　令 $\angle AOE = \alpha$,$\angle EOD = \beta$,$\angle DOH = \gamma$,$\angle COH = \delta$,由题设,知 AC 垂直平分 BD 于 O,以 O 为视点,考虑分别在 OJ、OI 所在的三角形 $\triangle EOH$ 及 $\triangle GOF$ 中应用张角定理.又在 $\triangle EOH$ 中,涉及 OE、OH,于是又在 $\triangle AOD$、$\triangle COD$ 及 $\triangle EOH$ 中分别应用张角定理,有

$$\frac{\sin 90^\circ}{OE} = \frac{\sin \alpha}{OD} + \frac{\sin \beta}{OA},\ \frac{\sin 90^\circ}{OH} = \frac{\sin \gamma}{OC} + \frac{\sin \delta}{OD}$$

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ} = \frac{\sin \beta}{OH} + \frac{\sin \gamma}{OE}$$

由上述三式,有

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OJ} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{OC} + \frac{\sin \beta \sin \delta}{OD} + \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{OD} + \frac{\sin \gamma \sin \beta}{OA}$$

同理,在 $\triangle AOB$、$\triangle COB$ 及 $\triangle GOE$ 中分别应用张角定理,有

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{OI} = \frac{\sin \gamma \sin \beta}{OC} + \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{OB} + \frac{\sin \beta \sin \delta}{OB} + \frac{\sin \beta \sin \gamma}{OA}$$

注意到 $OD = OB$,则有 $\frac{1}{OJ} = \frac{1}{OI}$,故 $OI = OJ$.

证法 2　如图 11.31,分别在 AB、BC 上取点 E'、H',使 $AE' = AE$,$CH' = CH$,则由对称性可知下列角相等,即若令

$$\angle AOE = \alpha,\ \angle AOE' = \beta,\ \angle COF = \gamma$$

$$\angle E'OG=\angle 1,\angle GOB=\angle 2,$$
$$\angle BOH'=\angle 3,\angle H'OF=\angle 4$$

则 $$\alpha=\beta=\gamma$$

又 $$\angle 1+\beta=\angle 4+\gamma$$

故 $$\angle 1=\angle 4,\angle 2=\angle 3$$

联结 $E'F$ 交 BD 于 K,在△BFE' 中

$$\frac{E'G}{GB}\cdot\frac{BH'}{H'F}\cdot\frac{FK}{KE'}=\frac{S_{\triangle E'OG}}{S_{\triangle GOB}}\cdot\frac{S_{\triangle BOH'}}{S_{\triangle H'OF}}\cdot\frac{S_{\triangle KOF}}{S_{\triangle E'OK}}=$$
$$\frac{OE'\cdot OG\sin\angle 1}{OG\cdot OB\sin\angle 2}\cdot\frac{OB\cdot OH'\sin\angle 3}{OH'\cdot OF\sin\angle 4}\cdot$$
$$\frac{OF\cdot OK\sin(\angle 3+\angle 4)}{OK\cdot OE'\sin(\angle 1+\angle 2)}=1$$

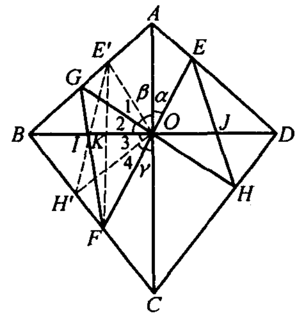


图 11.31

故由塞瓦定理的逆定理,知 $E'H'$、BK、GF 三线共点,即 $E'H'$ 过点 I.由对称性知,$OI=OJ$.

证法 3 (张景中院士给出)记

$$BO=OD=a,OI=x,OJ=y$$

由面积关系及正弦定理可得

$$\frac{x}{a-x}\cdot\frac{a-y}{y}=\frac{OI}{BI}\cdot\frac{DJ}{OJ}=\frac{S_{\triangle OGF}}{S_{\triangle BGF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle OEH}}=\frac{S_{\triangle OGF}}{S_{\triangle OEH}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle BGF}}=$$
$$\frac{OG\cdot OF}{OH\cdot OE}\cdot\frac{DH\cdot DE}{BG\cdot BF}=\frac{OG}{BG}\cdot\frac{OF}{BF}\cdot\frac{DH}{OH}\cdot\frac{DE}{OE}=$$
$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=1$$

(其中$\angle GOB=\alpha,\angle BOF=\beta,\angle ADO=\gamma,\angle CDO=\delta$)从而

$$x(a-y)=y(a-x)$$

即 $ax=ay$,亦即 $x=y$,证毕.

证法 4 (张景中院士给出)同证法 3 有

$$\frac{x}{a-x}\cdot\frac{a-y}{y}=\frac{OI}{BI}\cdot\frac{DJ}{OJ}=\frac{S_{\triangle OGF}}{S_{\triangle BGF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle OEH}}=\frac{OG}{OH}\cdot\frac{OF}{OE}\cdot\frac{DE}{BG}\cdot\frac{DH}{BF}=$$
$$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle BHD}}\cdot\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle BED}}\cdot\frac{DE\cdot DH}{BG\cdot BF}=\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle BED}}\cdot\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle BHD}}\cdot\frac{DE\cdot DH}{BG\cdot BF}=$$
$$\frac{BG\cdot BD}{DE\cdot BD}\cdot\frac{BF\cdot BD}{DH\cdot BD}\cdot\frac{DE\cdot DH}{BG\cdot BF}=1$$

从而 $ax=ay$，亦即 $x=y$，证毕.

证法 5　（南京市 16 中郭凤子给出）如图 11.32，作 $GG'\perp BD$，$FF'\perp BD$，$EE'\perp BD$，$HH'\perp BD$. 交 BD 于点 G'、F'、E'、H'. 易见

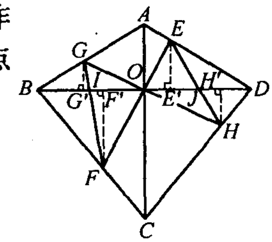


图 11.32

$$\frac{BG}{GG'}=\frac{AB}{AO}=\frac{AD}{AO}=\frac{ED}{EE'}$$

则
$$\frac{BG}{ED}=\frac{CG'}{EE'}$$

同理
$$\frac{BF}{DH}=\frac{FF'}{HH'}$$

于是
$$\frac{BG\cdot BF}{ED\cdot DH}=\frac{GG'\cdot FF'}{EE'\cdot HH'}$$

又
$$\frac{OF}{OE}=\frac{FF'}{EE'},\frac{OG}{OH}=\frac{GG'}{HH'}$$

故
$$\frac{GG'\cdot FF'}{EE'\cdot HH'}=\frac{OG\cdot OF}{OE\cdot OH}$$

即
$$\frac{BG\cdot BF}{ED\cdot DH}=\frac{OG\cdot OF}{OE\cdot OH}$$

则
$$\angle ABC=\angle ADC,\angle GOF=\angle EOF'$$

故
$$\frac{S_{\triangle GBF}}{S_{\triangle EDH}}=\frac{S_{\triangle GOF}}{S_{\triangle EOH}}$$

由合比定理得
$$\frac{S_{GBFO}}{S_{EDHO}}=\frac{S_{\triangle GOF}}{S_{\triangle EOH}}$$

即
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot OB(FF'+GG')}{\frac{1}{2}\cdot OD(EE'+HH')}=\frac{\frac{1}{2}\cdot OI(GG'+FF')}{\frac{1}{2}\cdot OJ(EE'+HH')}$$

因 $OB=OD$，则 $OI=OJ$.

证法 6　建立直角坐标系如图 11.33 所示，使 Ox 轴正方向与 $\overrightarrow{OD}$ 重合，Oy 轴正方向与 $\overrightarrow{OA}$ 重合. 设 $A(0,a)$、$D(0,d)$、$C(0,-c)$. 那么 AD 所在直线方程为

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{a}=1$$

CD 所在直线方程为

$$\frac{x}{d}-\frac{y}{c}=1$$

设 EF 所在直线方程为 $y=kx(k>0)$,GH 所在直线方程 $y=mx(m<0)$,那么易求出

$$E=(x_E,y_E),H=(x_H,y_H)$$

的坐标为

$$x_E=\frac{ad}{a+kd},y_E=\frac{kad}{a+kd},x_H=\frac{cd}{c-md},y_H=\frac{mcd}{c-md}$$

EH 所在直线方程为

$$y-y_E=(y_H-y_E)(x_H-x_E)^{-1}(x-x_E)$$

令 $y=0$,求出 OJ 之长为

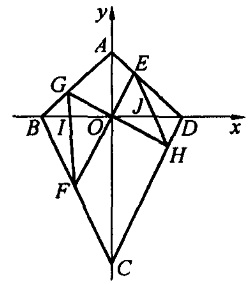


图 11.33

$$|OJ|=x=\frac{x_Ey_H-x_Hy_E}{y_H-y_E}=\frac{(k-m)adc}{(k-m)ac-kmd(a+c)}$$

同理可求出(注意到 $B(-d,0)$)

$$|OI|=\frac{(k-m)adc}{(k-m)ac-kmd(a+c)}$$

故

$$OI=OJ$$

第 1 节 阿基米德折弦定理(共点两弦折弦中点定理)

著名的数学物理学家阿基米德,一生为数学和物理学的发展作出了突出的贡献,发现和推证出了许多的定理和定律,折弦定理就是其中之一.在此我们作简要介绍如下.①②③

定义 圆上有一个公共端点所引的两条弦组成的图形称为折弦.如图11.34所示,圆 O 中,弦 AB 和 BC 组成圆 O 的一个折弦 ABC.

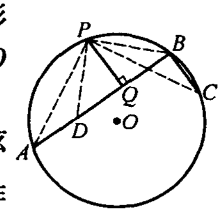


图 11.34

折弦定理 圆 O 中共点两弦 AB 和 BC 组成一个折弦 ABC,如果 $AB>BC$,P 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点,则从点 P 向 AB 所作垂线的垂足 Q 必为折弦 ABC 的中点,即 $AQ=QB+BC$.

证明 在 AB 上取点 D,使 $AD=BC$,联结 PA、PC、PD、PB.

① 闫照林,韩友信,闫雪.阿基米德折弦定理及应用[J].中学数学月刊,1997(6):33-34.
② 寿德.应用折弦定理解一道联赛题[J].中学教研(数学),1990(7):封底.
③ 冯录祥.折弦的一个性质及应用[J].中学教研(数学),1990(1):33.

因$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PC}$,则 $AP=PC$.又由$\angle A=\angle C$,$AD=BC$,知$\triangle APD\cong\triangle CPB$,即 $PD=PB$.又由 $PQ\perp AB$,有 $DQ=BQ$.故 $AQ=AD+DQ=BC+BQ$.

不难理解,折弦定理的意义是圆中一个折弦的两条弦所对的两段弧的中点在较长弦上的射影就是折弦的中点.

由折弦定理还可得出如下的推论.

推论 1　如图 11.34,当 P 是折弦 ABC 的$\overset{\frown}{ABC}$的中点时,有 $AB\cdot BC=PA^2-PB^2$.

证明　因 P 为$\overset{\frown}{ABC}$的中点,则

$$PA^2=AQ^2+PQ^2,PB^2=PQ^2+QB^2$$

故

$$PA^2-PB^2=AQ^2+PQ^2-(PQ^2+QB^2)=AQ^2-QB^2=(AQ+QB)(AQ-QB)=AB\cdot BC$$

推论 2　如图 11.35,当 P 是折弦 ABC 的$\overset{\frown}{AC}$的中点时,有 $AB\cdot BC=PB^2-PA^2$.

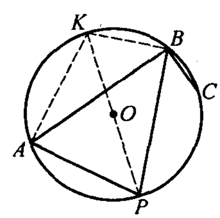


图 11.35

证明　取$\overset{\frown}{ABC}$的中点 K,联结 PK、AK、BK,由推论 1 知

$$KA^2-KB^2=AB\cdot BC$$

因 P、K 分别为$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{ABC}$的中点,则 PK 为圆 O 的直径,从而

$$PA^2+KA^2=PK^2,PB^2+KB^2=PK^2$$

于是

$$PA^2+KA^2=PB^2+KB^2$$

从而

$$PB^2-PA^2=KA^2-KB^2=AB\cdot BC$$

即

$$AB\cdot BC=PB^2-PA^2$$

折弦定理及其推论在解平面几何问题中有着一定的作用,下面仅举几例说明.

例 1　(前面试题 A)下面,我们运用折弦定理给出证明.

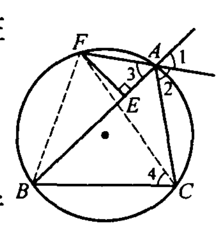


图 11.36

证明　如图 11.36,联结 BE、CF,由题意可知

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$$

又$\angle 2=\angle EBC$,所以$\angle 4=\angle EBC$,所以$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CA}$,即 E 是折弦 BAC 的$\overset{\frown}{BAC}$的中点,又 $EF\perp AB$,所以

$$BF=FA+AC$$

所以

$$AB-AF=FA+FC$$

所以
$$2FA=AB-AC$$

例2 在$\triangle ABC$中,最大角$\angle A$是最小角$\angle C$的两倍,夹角$\angle A$两边$b=5,c=4$.求第三边a和三角形面积.

(1980年上海市中学生数学竞赛题)

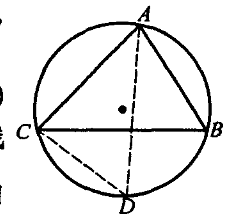


图11.37

解 如图11.37,作$\triangle ABC$的外接圆,作$\angle A$的平分线交外接圆于D,联结CD,则D为折弦BAC的$\overparen{BC}$的中点,由推论2知
$$AC\cdot AB=DA^2-DC^2 \quad ①$$
又因为
$$\overparen{CD}=\overparen{BD}=\overparen{AB}$$
所以
$$\overparen{CDB}=\overparen{DBA}$$
所以
$$CD=AB=c,AD=BC=a$$
由式①可得
$$bc=a^2-c^2 \quad ②$$
把$b=5,c=4$代入式②可求出$a=6$,再由海伦公式即可求出面积为$\frac{15}{4}\sqrt{7}$.

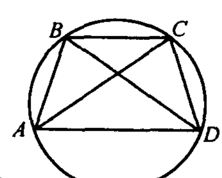
练 习 题

1. A、B、C、D是圆上四点,$\overparen{AB}=\overparen{BC}=\overparen{CD}$,求证:$BD^2=AB(AB+AD)$.

2. P是圆内接正方形$ABCD$的$\overparen{BC}$上一点,联结PA、PB、PC、PD,求证:$\frac{PB}{PC}=\frac{PA-PC}{PD-PB}$.

3. 已知P是正$\triangle ABC$外接圆的劣弧$\overparen{BC}$上一点,求证:(1)$PA=PB+PC$;(2)$PA^2=BC^2+PB\cdot PC$.

练习题解答



第1题

1. 如图,因B是$\overparen{AC}$中点,对折弦ADC,由推论2,得
$$AD\cdot DC=BD^2-AB^2 \quad ①$$
又C是$\overparen{BD}$中点,对折弦BAD,由推论2,得

$$BA\cdot AD=AC^2-BC^2 \quad ②$$

① + ②注意到

$$AB=BC=CD,AC=BD$$

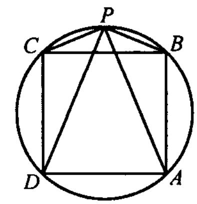
得
$$AD(AB+CD)=2BD^2-2AB^2$$

则
$$2AD\cdot AB=2(BD^2-AB^2)$$

故
$$BD^2=AB^2+AB\cdot AD=AB(AB+AD)$$

2.如图,因 C 是$\overset{\frown}{BPD}$中点,由推论 1,得

$$DP\cdot BP=CD^2-CP^2 \quad ①$$



第 2 题

又 B 是$\overset{\frown}{APC}$中点,由推论 1 得

$$PA\cdot PC=AB^2-PB^2 \quad ②$$

①－②,得
$$PB(PD-PB)=PC(PA-PC)$$

故
$$\frac{PB}{PC}=\frac{PA-PC}{PD-PB}$$

3.(1)若 P 是$\overset{\frown}{BC}$的中点,等式显然成立;当 P 不是$\overset{\frown}{BC}$的中点时,C 可看做是折弦 APB 的$\overset{\frown}{APB}$的中点,则

$$PA\cdot PB=AC^2-PC^2 \quad ①$$

又 B 也看做是折弦 APC 的$\overset{\frown}{APC}$的中点,则

$$PA\cdot PC=AB^2-PB^2 \quad ②$$

①－②得

$$PA(PB-PC)=PB^2-PC^2=(PB+PC)(PB-PC)$$

故
$$PA=PB+PC$$

(2)A 是折弦 BPC 的$\overset{\frown}{BC}$的中点,故

$$PA^2-AB^2=PB\cdot PC$$

即
$$PA^2=AB^2+PB\cdot PC=BC^2+PB\cdot PC$$

第 2 节　圆中张角定理(共点三弦夹角定理)

圆中张角定理　若 AB、AC、AD 是圆 O 的三条弦$\angle BAC=\alpha$,$\angle CAD=\beta$.则

$$AB\sin\beta+AD\sin\alpha=AC\sin(\alpha+\beta)$$

证明　如图 11.38,设圆 O 的半径为 R,联结 BC、BD、CD,则由正弦定理,得

$$BC=2R\sin\alpha,CD=2R\sin\beta,BD=2R\sin(\alpha+\beta)$$

又由托勒密定理得

$$BC\cdot AD+CD\cdot AB=AC\cdot BD$$

即 $$AD\cdot 2R\sin\alpha+AB\cdot 2R\sin\beta=AC\cdot 2R\sin(\alpha+\beta)$$

即 $$AB\sin\beta+AD\sin\alpha=AC\sin(\alpha+\beta)$$

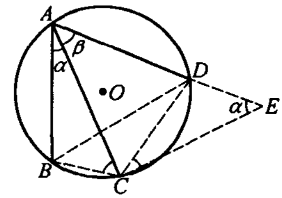


图 11.38

注 (1)若联结 BC、CD,作$\angle DCE=\angle BCA$,CE 与 AD 的延长线交于点 E,则由 $\angle CDE=\angle CBA$,知 $\triangle CDE\backsim\triangle CBA$,故$\angle E=\alpha$,且$\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{DE}{AB}$.

在$\triangle ACE$ 中应用正弦定理,并注意到

$$\sin\angle ACE=\sin(\alpha+\beta)$$

即可推得 $$\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AD+DE}{\sin(\alpha+\beta)}$$

及 $$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

从而 $$AC\sin(\alpha+\beta)=AD\sin\alpha+DE\sin\alpha=AD\sin\alpha+AB\sin\beta$$

(2)圆中张角定理的逆定理也成立.

由点 A 发出的三条射线上各有点 B、C、D,记

$$\angle BAC=\alpha,\angle CAD=\beta,\angle BAD=\alpha+\beta<180^\circ$$

若 $$AB\sin\beta+AD\sin\alpha=AC\sin(\alpha+\beta)$$

则 A、B、C、D 四点共圆.

事实上,可过 A、B、D 三点作圆,交射线 AC 于点 C',则由圆中张角定理,有

$$AC'\sin(\alpha+\beta)=AB\sin\beta+AD\sin\alpha$$

由题设有 $$AC\sin(\alpha+\beta)=AB\sin\beta+AD\sin\alpha$$

得 $AC'=AC$,由此即得知点 C'与点 C 重合.

故 A、B、C、D 四点共圆.

由上述定理可得如下推论.

推论 1 当 $\alpha=\beta$,即 AC 平分$\angle BAD$ 时,则

$$AB+AD=2AC\cos\alpha$$

推论 2 当 $\alpha=180^\circ-\beta$,即 AC 平分$\angle BAD$ 的外角时,则

$$AB-AD=2AC\cos\alpha$$

事实上,如图 11.39 所示,设直线 AC 与 BD 的延长线交于点 E,联结 BC.

若 $AB>AD$,则由$\angle DAC=\beta$,$\angle BAC=\alpha$,知

$$\angle BAD=\beta-\alpha=180^\circ-2\alpha$$

从而有
$$AB-AD=2AC\cos\alpha$$

若 $AB<AD$，则由
$$\angle BAC=\alpha,\angle DAC=\beta$$

知
$$\angle BAD=\alpha-\beta=180^\circ-2\beta=2\alpha-180^\circ$$

亦有
$$AB-AD=2AC\cos\alpha$$

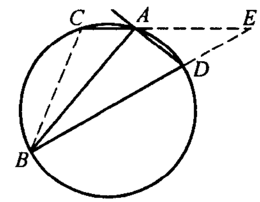


图 11.39

此定理建立了圆中具有公共端点的三条弦及其夹角之间的数量关系，也称之为三弦夹角定理．巧妙地运用它解有关的平几题目，思路清晰、新颖，过程简捷、明快，颇具特色．下面举例说明．①②③④

例 1　（前面试题 A）

证明　注意到 $\angle BAE=\alpha$，在 Rt$\triangle AEF$ 中 $AF=AE\cos\alpha$．从而由推论 2，有
$$AB-AC=2AE\cos\alpha=2AF$$

例 2　如图 11.40，在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC<BC$，D 在 BC 上，E 在 BA 的延长线上，且 $BE=BF=AC$，$\triangle BDE$ 的外接圆和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 F．求证：$BF=AF+CF$．

（1991 年全国初中数学联赛题）

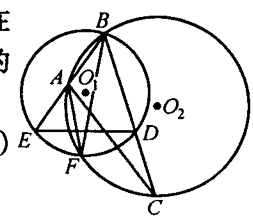


图 11.40

证明　对于三弦 BE、BF、BD，用定理得
$$BE\sin\angle FBC+BD\sin\angle EBF=BF\sin(\angle EBF+\angle FBD)$$

因
$$BE=BF=AC,\angle ABF=\angle ACF$$
$$\angle FBC=\angle FAC,\angle EBC=180^\circ-\angle AFC$$

则
$$AC\sin\angle FAC+AC\sin\angle ACF=BF\sin\angle AFC$$

即
$$BF=\frac{AC\sin\angle FAC}{\sin\angle AFC}+\frac{AC\sin\angle ACF}{\sin\angle AFC}$$

在 $\triangle AFC$ 中，由正弦定理得
$$\frac{\sin\angle FAC}{\sin\angle AFC}=\frac{FC}{AC},\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle AFC}=\frac{AF}{AC}$$

故
$$BF=AF+CF$$

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=2\angle A$，求证：$b^2=a(a+c)$．

证明　如图 11.41，作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 E，交其外接圆于 D，由 $\overset{\frown}{DAB}=$

① 周余孝．圆周角平分线的一个性质及其应用[J]．中学数学，1993(7)：38-39．
② 周奕生．一类竞赛题的统一证法[J]．中学数学教学，1994(6)：23-24．
③ 针森．圆周角的分角弦公式及应用[J]．中学教研(数学)，1994(11)：25-27．
④ 路李明．共点三弦夹角定理及应用[J]．中学数学月刊，1998(7-8)：78-80．

$\overset{\frown}{ABC}$,知 $AC = BD$.

由推论 1 可得

$$AB + BC = 2BD\cos\frac{B}{2} = 2AC\cos A$$

即
$$c + a = 2b\cos A$$

再将 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 代入上式即得结论.

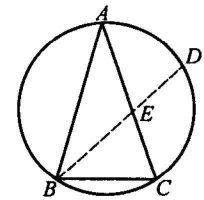


图 11.41

例 4 已知一个等腰三角形,其外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,求证:两圆圆心距 $d = \sqrt{R(R-2r)}$.

(第 4 届国际数学竞赛题)

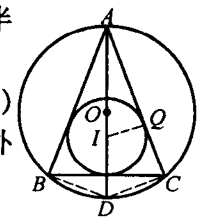


图 11.42

证明 如图 11.42,设 I、O 分别为等腰△ABC 的内心和外心,那么 $OI = d$.

因 I 为△ABC 的内心,$AB = AC$,则 A、I、O 三点共线.

延长 AI 至 D,交△ABC 外接圆于 D,联结 DC、BD、IQ,即知 AD 为△ABC 外接圆直径.又

$$\angle ABC = \angle ACB$$

而
$$\angle ABC = \angle ADC, \angle ACB = \angle ADB$$

则
$$\angle ADC = \angle ADB$$

由推论 1,得

$$AD = \frac{(BD + DC)}{2\cos\dfrac{\angle BDC}{2}}$$

易证
$$BD = DC = ID = R - d$$

$$\cos\frac{\angle BDC}{2} = \cos\angle AIQ = \frac{IQ}{AI} = \frac{r}{R + d}$$

于是
$$2R\cdot 2\cdot\frac{r}{R + d} = 2(R - d)$$

即
$$d^2 - R^2 = 2Rr$$

故
$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

例 5 在△ABC 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交外接圆于 P、Q、R.证明:$AP + BQ + CR > BC + CA + AB$.

(1982 年澳大利亚竞赛题)

证明 如图 11.43,因 AP 是$\angle BAC$ 的平分线,则由推论 2,得

$$AP=\frac{CA+AB}{2\cos\frac{A}{2}}$$

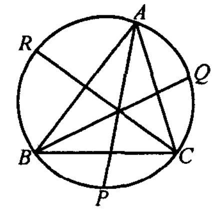


图 11.43

所以　$$2AP\cos\frac{A}{2}=CA+AB<2AP$$

同理　$$AB+BC<2BQ,BC+CA<2CR$$

三式相加得

$$AP+BQ+CR>BC+CA+AB$$

注　此题结论可加强为

$$BC+CA+AB=AP\cos\frac{A}{2}+BQ\cos\frac{B}{2}+CR\cos\frac{C}{2}$$

例 6　如图 11.44,设正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC、CE 分别被内点 M、N 分成比为$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$.如果 B、M、N 三点共线,求 r.

（1982 年国际奥林匹克数学竞赛试题）.

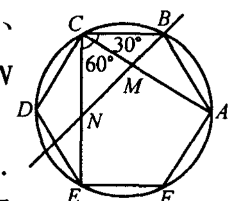


图 11.44

解　设正六边形的边长为 a,对角线 $AC=CE=k$,由$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$ 得 $AM=CN=kr$,从而

$$CM=AC-AM=k-kr=(1-r)k$$

易知$\angle ACE=60°$,$\angle ACB=30°$,由推论 1,得

$$k=\frac{k\sin 30°+a\sin 60°}{\sin(30°+60°)}$$

即　$$k=\sqrt{3}a$$

进而　$$CN=\sqrt{3}ar,CM=\sqrt{3}a(1-r)$$

因　$$S_{\triangle CMN}+S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCN}$$

则　$$\sqrt{3}ar\cdot\sqrt{3}a(1-r)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}a(1-r)\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}ar\cdot a$$

即　$$\frac{3}{2}r(1-r)+\frac{1}{2}(1-r)=r$$

整理得 $3r^2=1$,$r=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,由题意得知 $r>0$,故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

注　此题如不限制 M、N 为 AC、CE 之内点,则 $r=-\frac{\sqrt{3}}{3}$也是有其几何意义的.

例 7　如图 11.45,已知锐角$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 平分线交 BC 于 L,交外接圆于

N,过 L 作 $LK\perp AB$, $LM\perp AC$,垂足为 K、M.求证:四边形 $AKNM$ 的面积等于$\triangle ABC$ 的面积.

(1987 年第 28 届 IMO 试题)

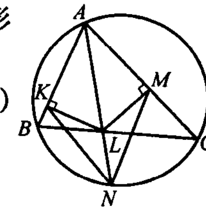


图 11.45

证明 设$\angle BAN=\angle CAN=\alpha$,则

$$2AN\cos\alpha=AB+AC$$

而
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABL}+S_{\triangle ACL}=\frac{1}{2}\cdot AL(AB+AC)\sin\alpha=$$
$$AL\cdot AN\sin\alpha\cos\alpha=AN\cdot AK\sin\alpha=2S_{\triangle AKN}$$

易证
$$AK=AM$$

则
$$S_{\triangle AKN}=S_{\triangle AMN}$$

故
$$S_{\triangle ABC}=S_{AKNM}$$

例 8 若 $a\geqslant b>c$ 且 $a<b+c$,解方程

$$b\sqrt{x^2-c^2}+c\sqrt{x^2-b^2}=ax \qquad ①$$

(1993 年全国南昌市初中数学竞赛题)

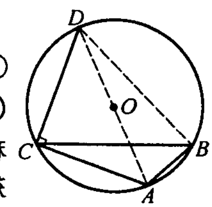


图 11.46

分析 本题若采取两边同时平方脱去根号的办法求解,十分麻烦,如能注意方程自身的特点,巧妙地构造三弦夹角模型,可使方程获得简解.

解 由题意知,可以以 a、b、c 为边长作$\triangle ABC$,使 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,且 $a\geqslant b>c$,如图 11.46 所示,过 C 作 CA 的垂线交$\triangle ABC$ 的外接圆圆于 D,联结 AD、BD,易证$\angle ABD=90°$.由定理知

$$b\sin\angle BAD+c\sin\angle CAD=AD\sin\angle BAC$$

而
$$\sin\angle BAD=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{AD^2-c^2}}{AD}$$
$$\sin\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{AD^2-b^2}}{AD}$$
$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AD}=\frac{a}{AD}(\text{正弦定理})$$

则
$$b\sqrt{AD^2-c^2}+c\sqrt{AD^2-b^2}=aAD \qquad ②$$

比较①、②知 $AD=x$.而

$$AD=\frac{a}{\sin\angle BAC}$$

由
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc,\sin\angle BAC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

得 $$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

故 $$x=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

其中 $$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

练 习 题

1. 已知 P 是正方形 $ABCD$ 的外接圆 $\overset{\frown}{AD}$ 上任一点，则 $\frac{PA+PC}{PB}=$ ________.

2. 四边形 $ABCD$ 内接于一个长度为 4 的 AD 边作为直径的圆中，若 AB 和 BC 的长度为 1，那么 CD 边长为________.

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{11}$　　D. $\sqrt{13}$　　E. $2\sqrt{3}$

（1971年美国中学生数学竞赛题）

3. 已知 AC 是▱$ABCD$ 较长的对角线，求 C 作 $CF\perp AF$，$CE\perp AE$，垂足为 F、E，求证：$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$.

（1987年宝鸡市初中数学竞赛题）

4. 若△ABC 的三边为连续整数，且最大角∠A 是最小角∠C 的两倍. 求△ABC 三边的长.

5. 设圆内接四边形四边长之比依次为 1:9:8:8. 证明：该四边形的一内角恰巧为 60°.

（《数学通报》1988年第6期问题536号）

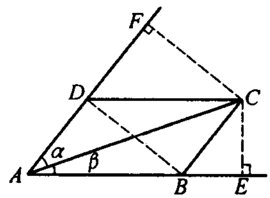
练习题解答

1. 显然 $\angle APB=\angle BPC=45°$，由三弦夹角定理得
$$PA+PC=2PB\cdot\sin 45°$$
故 $$\frac{PA+PC}{PB}=\sqrt{2}$$

2. 由 $AB=BC=1$ 可设 $\angle BDA=\angle BDC=\alpha$，由推论2得
$$BD=\frac{DC+DA}{2\cos\alpha}$$
在 Rt△ABD 中
$$BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=\sqrt{15}$$

从而
$$\cos\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$
所以$\sqrt{15}=\dfrac{DC+4}{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$，即 $DC=\dfrac{7}{2}$，故选 A.

3. 如图，记$\angle CAF=\alpha$，$\angle CAE=\beta$，联结 BD，则
$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$$
又
$$\angle AEC=\angle AFC=90^\circ$$
则 A、E、C、F 四点共圆. 对三弦 AE、AC、AF 由定理得

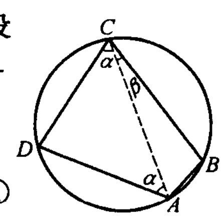


第3题

$$AE\sin\alpha+AF\sin\beta=AC\sin(\alpha+\beta)$$
将上式两边同乘以$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot AC$，则
$$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot AC\cdot AE\sin\alpha+\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot AC\cdot AF\sin\beta=$$
$$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot AC^2\sin(\alpha+\beta)$$
显然有
$$AB\cdot AE\cdot S_{\triangle ACD}+AD\cdot AF\sin\beta=AC^2S_{\triangle ABD}$$
即
$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$$

4. 设$\angle A$ 的平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D，$BC>AC>AB$，令 $AC=x$，则 $BC=x+1$，$AB=x-1$，由上例知
$$2BC\cos C=AB+AC$$
$$AB^2=AC^2+BC^2-AC(AB+AC)=BC^2-AB\cdot AC$$
所以
$$(x-1)^2=(x+1)^2-x(x-1),\ x^2-5x=0$$
因为 x 为自然数，所以 $x=5$，$\triangle ABC$ 三边的长为
$$AB=4,AC=5,BC=6$$

5. 如图，设 $AB=1$，$BC=9$，$CD=DA=8$. 联结 AC，设$\angle DCA=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，则$\angle DAC=\alpha$，$\angle CAB=180^\circ-2\alpha-\beta$.



第5题

对于三弦 CD、CA、CB，由定理有
$$9\sin\alpha+8\sin\beta=AC\sin(\alpha+\beta) \quad ①$$
对三弦 AD、AC、AB，由定理有
$$\sin\alpha+8\sin(180^\circ-2\alpha-\beta)=AC\sin(180^\circ-\alpha-\beta)$$

即

$$\sin\alpha + 8\sin(2\alpha+\beta) = AC\sin(\alpha+\beta) \qquad ②$$

①－②得

$$\sin\alpha = 2\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta$$

由和差化积公式，得

$$\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

则

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$$

故 $\alpha+\beta=60°$，即 $\angle C=60°$.

第 3 节　圆内接凸 n 边形的正弦定理

约定：圆内接 $n(n\geqslant 3)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是凸的，它的顶点为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 边长为 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_nA_1$ 以及它们所对的弧 $\overset{\frown}{A_1A_2},\overset{\frown}{A_2A_3},\cdots,\overset{\frown}{A_nA_1}$，都是逆时针方向顺序. 记 $a_1=A_1A_2,a_2=A_2A_3,\cdots,a_n=A_nA_1,A_1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1A_2}$(弧度)，$A_2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_2A_3}$(弧度)，$\cdots$，$A_n=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_nA_1}$(弧度)，$\hat{A}_1,\hat{A}_2,\cdots,\hat{A}_n$ 分别表示 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角. 并且，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\pi,\hat{A}_1+\hat{A}_2+\cdots+\hat{A}_n=(n-2)\pi$.

圆内接 n 边形的正弦定理　在半径是 R 的圆的内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，任何一边的长与它所对的弧的弧度的一半的正弦的比都相等，都等于圆的直径 $(2R)$，即

$$\frac{a_1}{\sin A_1}=\frac{a_2}{\sin A_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin A_n}=2R$$

证明　边长 a_i 所对的弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}(i=1,2,\cdots,n,A_{n+1}=A_1)$ 是优弧、π(弧度)或劣弧. 如图 11.47 所示.

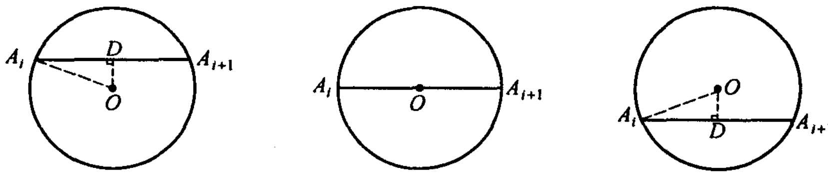
作 $OD\perp A_iA_{i+1}$ 于点 D，联结 OA_i，对于图 11.47(a)有

$$a_i=2R\sin\angle DOA_i=2R\sin A_i\frac{2\pi-\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}}{2}=2R\sin(\pi-A_i)=2R\sin A_i$$

即

$$\frac{a_i}{\sin A_i}=2R$$

对于图 11.47(b)，有



(a) (b) (c)

图 11.47

$$a_i=2R=2R\sin\frac{\pi}{2}=2R\sin\frac{\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}}{2}=2R\sin A_i$$

即
$$\frac{a_i}{\sin A_i}=2R$$

对于图 11.47(c),有

$$a_i=2R\sin\angle DOA_i=2R\sin\frac{\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}}{2}=2R\sin A_i$$

即
$$\frac{a_i}{\sin A_i}=2R$$

总之
$$\frac{a_i}{\sin A_i}=2R$$

即
$$\frac{a_1}{\sin A_1}=\frac{a_2}{\sin A_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin A_n}=2R$$

例 1 试证:圆的内接四边形中正方形的周长最大.

证明 在$(0,\pi)$上,$\sin x$ 是凸函数.在圆的内接四边形中

$$a_1=2R\sin A_1, a_2=2R\sin A_2$$
$$a_3=2R\sin A_3, a_4=2R\sin A_4, A_1+A_2+A_3+A_4=\pi$$
$$a_1+a_2+a_3+a_4=2R(\sin A_1+\sin A_2+\sin A_3+\sin A_4)\leqslant$$
$$2R\cdot 4\sin\frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4}=4\sqrt{2}R$$

式中等号成立的充要条件是 $A_1=A_2=A_3=A_4=\frac{\pi}{4}$,即圆内接四边形是正方形.因此圆内接四边形中以正方形的周长最长.

例 2 设圆内接四边形四边之长的比依次是 1:9:8:8.证明:该四边形的一内角恰巧是 60°.

(《数学通报》1988 年第 6 期问题 536)

证明 如图 11.48,有

$$a_1:a_2:a_3:a_4=1:9:8:8$$

则$\angle A_3=\angle A_4$,并且

$$\angle A_1+\angle A_2+2\angle A_3=\pi,\sin A_3=\cos\frac{A_1+A_2}{2}$$

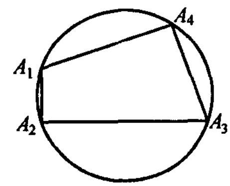


图 11.48

又　$a_1=2R\sin A_1,a_2=2R\sin A_2,a_3=2R\sin A_3$

且　$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{9}=\frac{a_3}{8}$$

则　$$\sin A_1=\frac{\sin A_2}{9}=\frac{\sin A_3}{8}$$

则　$$\frac{\sin A_2-\sin A_1}{9-1}=\frac{\sin A_3}{8}\text{(等比定理)}$$

即　$$2\cos\frac{A_2+A_1}{2}\sin\frac{A_2-A_1}{2}=\cos\frac{A_1+A_2}{2}$$

从而　$$\sin\frac{A_2-A_1}{2}=\frac{1}{2}$$

则　$$\angle A_2-\angle A_1=\frac{\pi}{3}$$

即　$$\angle A_1+\angle A_1+\frac{\pi}{3}+2\angle A_3=\pi,\angle A_1+\angle A_3=\frac{\pi}{3}$$

故内角$\angle A_3=\angle A_1+\angle A_4=\frac{\pi}{3}$.证毕.

注　注意内角$\angle A_3$与$\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_3A_4}=\angle A_3$的区别.

例 3　(前面的试题 A)

证明　如图 11.49,因

$$\angle DAE=\angle EAB=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

$$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{CAE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CAB}=\angle B+\angle C$$

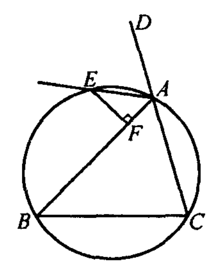


图 11.49

又　$$AB>AC$$

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CAE}-\overset{\frown}{CA}=2\angle DAE-2\angle B=\angle C-\angle B>0$$

则　$$AE=2R\sin\frac{\overset{\frown}{AE}}{2}=2R\sin\frac{C-B}{2}$$

故　$$2AF=2AE\cos\angle EAB=2\cdot 2R\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}=$$

$$2R(\sin C-\sin B)=AB-AC$$

第 4 节　圆中蝴蝶定理的一些证法及圆中蝴蝶定理的衍化

1. 蝴蝶定理的一些证法

蝴蝶定理　过圆 O 的弦 PQ 的中点 M 引任意两弦 AB、CD,联结 AD、BC 交 PQ 于 E、F.求证:$ME=MF$.

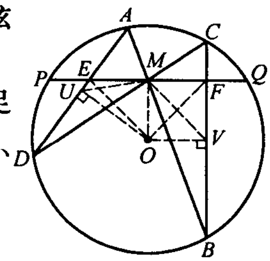


图 11.50

证法 1　如图 11.50,作 $OU\perp AD$,$OV\perp BC$,则垂足 U、V 分别为 AD、BC 的中点,且 M、E、U、O 共圆;M、F、V、O 共圆.则

$$\angle AUM=\angle EOM,\angle MOF=\angle MVC$$

又$\triangle MAD\backsim\triangle MCB$,$U$、$V$ 为 AD、BC 的中点,从而

$$\triangle MUA\backsim\triangle MVC,\angle AUM=\angle MVC$$

则
$$\angle EOM=\angle MOF$$

于是 $ME=MF$.

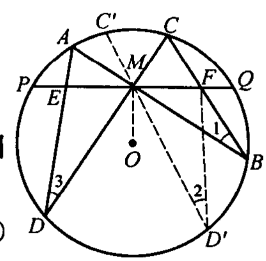


图 11.51

证法 2　过 D 作关于直线 OM 的对称点 D',如图 11.51所示,则

$$\angle FMD'=\angle EMD,MD=MD' \quad ①$$

联结 $D'M$ 交圆 O 于 C',则 C 与 C' 关于 OM 对称,即 $\overset{\frown}{PC'}=\overset{\frown}{CQ}$.又

$$\angle CFP\xlongequal{m}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{QB}+\overset{\frown}{PC})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{QB}+\overset{\frown}{CC'}+\overset{\frown}{CQ})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC'}\xlongequal{m}\angle BD'C'$$

故 M、F、B、D' 四点共圆,即

$$\angle MBF=\angle MD'F$$

而
$$\angle MBF=\angle EDM$$

故
$$\angle EDM=\angle MD'F \quad ②$$

由①、②知

$$\triangle DME\cong\triangle D'MF$$

故
$$ME=MF$$

证法 3　如图 11.52,设直线 DA 与 BC 交于点 N.对 $\triangle NEF$ 及截线 AMB.对 $\triangle NEF$ 及截线 CMD 分别应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{FM}{ME}\cdot\frac{EA}{AN}\cdot\frac{NB}{BF}=1$$

$$\frac{FM}{ME}\cdot\frac{ED}{DN}\cdot\frac{NC}{CF}=1$$

由上述两式相乘,并注意到

$$NA\cdot ND=NC\cdot NB$$

得

$$\frac{FM^2}{ME^2}=\frac{AN}{AE}\cdot\frac{ND}{ED}\cdot\frac{BF}{BN}\cdot\frac{CF}{CN}=\frac{BF\cdot CF}{AE\cdot ED}=\frac{PF\cdot FQ}{PE\cdot EQ}=$$
$$\frac{(PM+MF)(MQ-MF)}{(PM-ME)(MQ+ME)}=\frac{PM^2-MF^2}{PM^2-ME^2}$$

化简上式后得

$$ME=MF$$

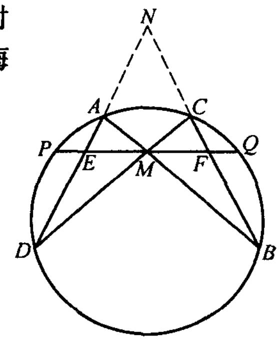


图 11.52

证法 4　(斯特温(steven)给出)如图 11.50,并令

$$\angle DAB=\angle DCB=\alpha,\angle ADC=\angle ABC=\beta$$
$$\angle DMP=\angle CMQ=\gamma,\angle AMP=\angle BMQ=\delta$$
$$PM=MQ=a,ME=x,MF=y$$

因

$$\frac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle FCM}}\cdot\frac{S_{\triangle FCM}}{S_{\triangle EDM}}\cdot\frac{S_{\triangle EDM}}{S_{\triangle FMB}}\cdot\frac{S_{\triangle FMB}}{S_{\triangle AME}}=1$$

即

$$\frac{AM\cdot AE\sin\alpha}{MC\cdot CF\sin\alpha}\cdot\frac{FM\cdot CM\sin\gamma}{EM\cdot MD\sin\gamma}\cdot\frac{ED\cdot MD\sin\beta}{FB\cdot BM\sin\beta}\cdot\frac{MF\cdot MB\sin\delta}{MA\cdot ME\sin\delta}=1$$

化简得

$$\frac{MF^2}{ME^2}=\frac{CF\cdot FB}{AE\cdot ED}=\frac{QF\cdot FP}{PE\cdot EQ}=\frac{(a-y)(a+y)}{(a-x)(a+x)}=\frac{a^2-y^2}{a^2-x^2}$$

即

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{a^2-y^2}{a^2-x^2}$$

从而

$$x=y,ME=MF$$

证法 5　(加拿大·柯克塞特给出)如图 11.53,过 E 作 $EG\perp AB$,$EH\perp CD$;过 F 作 $FL\perp DC$,$FK\perp AB$,令 $EM=x$,$MF=y$,则

$$\frac{x}{y}=\frac{EG}{FK}=\frac{EH}{LF}$$

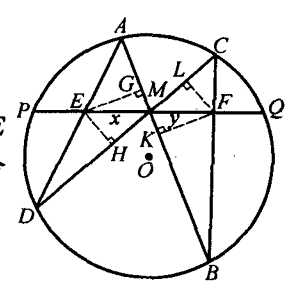


图 11.53

即 $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{EG\cdot EH}{FK\cdot FL}=\frac{EG}{FL}\cdot\frac{EH}{FK}$$

但 $$\frac{EG}{FL}=\frac{AE}{CF},\frac{EH}{FK}=\frac{DE}{BF}$$

即 $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{AE\cdot DE}{CF\cdot BF}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a-y)(a+y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$$

故 $$ME=MF$$

证法 6 如图 11.53,联结 AP、PD、QC、QB,由 $\triangle PDM\backsim\triangle CQM$,$\triangle PAM\backsim\triangle BQM$,$\triangle DAM\backsim\triangle BCM$,有

$$\frac{QC}{PD}=\frac{MC}{MP},\frac{QB}{PA}=\frac{MQ}{MA},\frac{BC}{DA}=\frac{MB}{MD}$$

由 $$\frac{ME}{PE}\cdot\frac{FQ}{FM}=\frac{S_{\triangle MAD}}{S_{\triangle PAD}}-\frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle MBC}}=\frac{S_{\triangle MAD}}{S_{\triangle MBC}}\cdot\frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle PQB}}\cdot\frac{S_{\triangle PQB}}{S_{\triangle PQD}}\cdot\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{\triangle PAD}}=$$

$$\frac{MA\cdot MD}{MC\cdot MB}\cdot\frac{QC\cdot BC}{PQ\cdot PD}\cdot\frac{BQ\cdot PB}{DQ\cdot PD}\cdot\frac{PQ\cdot QD}{PA\cdot DA}=$$

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{MD}{MC}\cdot\frac{QC\cdot BQ\cdot BC}{PD\cdot PA\cdot DA}=$$

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{MD}{MC}\cdot\frac{MC}{MP}\cdot\frac{MQ}{MA}\cdot\frac{MB}{MD}=\frac{MQ}{MP}$$

从而 $$MP=MQ\Leftrightarrow\frac{ME}{PE}=\frac{MF}{QF}\Leftrightarrow ME=MF$$

证法 7 不妨设 $EM\geqslant FM$,因 $PM=MQ$,则

$$PM^2-EM^2\leqslant MQ^2-FM^2$$

即 $$(PM+ME)(PM-ME)\leqslant(MQ+MF)(MQ-FM)$$

由于 $$PM+ME=MQ+ME=EQ$$

$$MQ+MF=PM+MF=PF$$

所以 $$EQ\cdot PE\leqslant PF\cdot FQ$$

又由相交弦定理,有

$$AE\cdot ED\leqslant CF\cdot FB \qquad (*)$$

注意到正弦定理有

$$AE=\frac{\sin\angle EMA}{\sin\angle EAM}\cdot EM,ED=\frac{\sin\angle EMD}{\sin\angle EDM}\cdot EM$$

$$CF=\frac{\sin\angle CMF}{\sin\angle MCF}\cdot MF,FB=\frac{\sin\angle FMB}{\sin\angle MBC}\cdot MF$$

将上述各式代入式(*),得 $EM^2 \leqslant MF^2$,即 $EM \leqslant FM$,但已知 $EM \leqslant FM$,故 $EM = FM$.

证法 8　如图 11.54,设

$$ME = x, MF = y. PM = MQ = a$$

$\angle DAB = \alpha, \angle ADC = \beta, \angle CMQ = \gamma, \angle AME = \delta$

在△AME 中,由正弦定理得

$$\frac{ME}{\sin \alpha} = \frac{EA}{\sin \delta}$$

在△DME 中

$$\frac{ME}{\sin \beta} = \frac{ED}{\sin \gamma}$$

则

$$ME^2 = \frac{EA \cdot ED \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin \delta}$$

同理

$$MF^2 = \frac{FC \cdot FB \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin \delta}$$

故

$$\frac{ME^2}{MF^2} = \frac{EA \cdot ED}{FC \cdot FB} = \frac{PE \cdot EQ}{FQ \cdot FP}$$

即

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(a - x)(a + x)}{(a - y)(a + y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

从而得到 $x = y$,即 $ME = MF$.

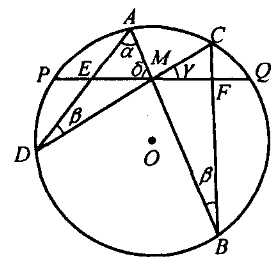


图 11.54

证法 9　令$\angle PMD = \angle QMC = \alpha, \angle QMB = \angle AMP = \beta$,以点 M 为视点,对△MBC 和△MAD 分别应用张角定理,有

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{MF} = \frac{\sin \beta}{MC} + \frac{\sin \alpha}{MB}, \frac{\sin(\alpha + \beta)}{ME} = \frac{\sin \beta}{MD} + \frac{\sin \alpha}{MA}$$

上述两式相减,得

$$\sin(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{MF} - \frac{1}{ME}\right) = \frac{\sin \beta}{MC \cdot MD}(MD - MC) - \frac{\sin \alpha}{MA \cdot MB}(MB - MA)$$

设 G、H 分别为 CD、AB 的中点,由 $OM \perp PQ$,有

$$MB - MA = 2MH = 2OM\cos(90^\circ - \beta) = 2OM\sin \beta$$

$$MD - MC = 2MG = 2OM\cos(90^\circ - \alpha) = 2OM\sin \alpha$$

于是

$$\sin(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{MF} - \frac{1}{ME}\right) = 0$$

而 $\alpha + \beta \neq 180^\circ$,知 $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$,故

$$ME = MF$$

证法 10 （单墫教授给出）如图 11.55，建立直角坐标系，则圆的方程可设为

$$x^2+(y+a)^2=R^2$$

直线 AB 的方程为 $y=k_1x$，直线 CD 的方程为 $y=k_2x$.

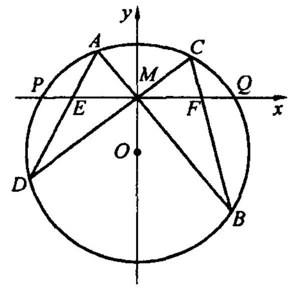


图 11.55

由于圆和两相交直线组成的二次曲线系方程为

$$\mu[x^2+(y+a)^2-R^2]+\lambda[(y-k_1x)(y-k_2x)]=0$$

令 $y=0$，知点 E 和点 F 的横坐标满足二次方程

$$(\mu+\lambda k_1k_2)x^2+\mu(a^2-R^2)=0$$

由于 x 的系数为 0，则两根 x_1 和 x_2 之和为 0.

即 $x_1=-x_2$，故 $ME=MF$.

注 此种证法不仅简捷，而且内涵丰富，若 AC、BD 分别交直线 PQ 于 R、S，则即证得 $RM=MS$. 若将圆的方程换为椭圆或双曲线或抛物线方程，则得到这些曲线中的蝴蝶定理.

证法 11 如图 11.56 建立平面直角坐标系，则圆的方程可写为

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

直线 AB、CD 的方程可写为

$$y=k_1x,\ y=k_2x$$

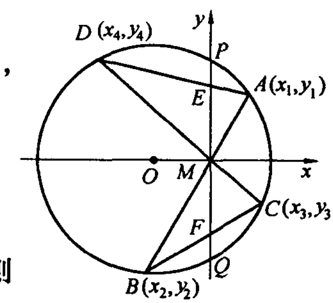


图 11.56

又设 A、B、C、D 的坐标为 (x_i,y_i)，$i=1,2,3,4$，则 x_1、x_4 分别是二次方程 $(x-a)^2+k_1^2x^2=r^2$，$(x-a)^2+k_2^2x^2=r^2$ 的一根. AD 在 y 轴上的截矩为

$$y_1-\frac{y_4-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1=k_1x_1-\frac{(k_2x_4-k_1x_1)x_1}{x_4-x_1}=\frac{(k_1-k_2)x_1x_4}{x_4-x_1}$$

同理，BC 在 y 轴上的截矩为

$$\frac{(k_1-k_2)x_2x_3}{x_3-x_2}$$

注意到 x_1、x_2 是方程 $(1+k_1^2)x^2-2ax+a^2-r^2=0$ 的两根，x_3、x_4 是方程 $(1+k_2^2)x^2-2ax+a^2-r^2=0$ 的两根，所以

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2a}{a^2-r^2}=\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}$$

从而易得
$$\frac{x_1x_4}{x_4-x_1}+\frac{x_2x_3}{x_3-x_2}=0$$
即
$$|ME|=|MF|$$

证法 12　如图 11.57，以 M 为极点，MO 为极轴建立极坐标系．因 C、F、B 三点共线，令 $\angle BMx=\alpha$，$\angle CMx=\beta$，则
$$\rho_C\rho_F\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\rho_F\rho_B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\rho_C\rho_B\sin(\beta-\alpha)$$
即
$$\rho_F=\frac{\rho_C\rho_B\sin(\beta-\alpha)}{\rho_B\cos\alpha-\rho_C\cos\beta} \quad ①$$
$$\rho_E=\frac{\rho_A\rho_D\sin(\beta-\alpha)}{\rho_A\cos\alpha-\rho_D\cos\beta} \quad ②$$

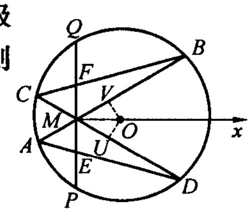


图 11.57

作 $OU\perp CD$ 于 U，作 $OV\perp AB$ 于 V．注意到
$$\rho_A\rho_B=\rho_C\rho_D \quad ③$$
由 $\text{Rt}\triangle OUM$ 与 $\text{Rt}\triangle OVM$ 可得
$$\frac{\rho_B-\rho_A}{\cos\alpha}=\frac{\rho_D-\rho_C}{-\cos\beta} \quad ④$$
将③、④代入①、②可得 $\rho_E=\rho_F$，即 $ME=MF$．

2．蝴蝶定理的衍化①

命题 1　（坎迪定理）过圆 O 弦 AB 上任意一点 M，作两条弦 CD、EF，联结 ED、CF，如果它们与 AB 分别交于 P、Q，且 $AM=a$，$MB=b$，$MQ=x$，$MP=y$，则
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

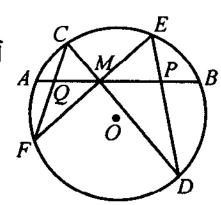


图 11.58

命题 1 的证明基本上可套用蝴蝶定理的证法 4 的途径．并可得出蝴蝶定理是命题 1 的一种特殊情形，即将命题 1 的条件定为 $a=b$，则得 $x=y$．

若将图 11.58 中 AB 上的点 M 移出 AB 外，但点 M 在圆内，于是有

命题 2　如图 11.59，点 M 是圆 O 内任意一点，且不在弦 AB 上，过 M 作两条弦 CD、EF 与弦 AB 分别交于 H、N，联结 ED、CF 与 AB 分别交于 P、Q，且

① 龙瑶，陈灿．蝴蝶定理的衍化与统一处理[J]．中学教研，1991(2):28-29．

$AH=a_1,HB=b_1,AN=a_2,NB=b_2,QH=x,PN=y$,则

$$\frac{1}{a_2b_2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a_1}\right)=\frac{1}{a_1b_1}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b_2}\right)$$

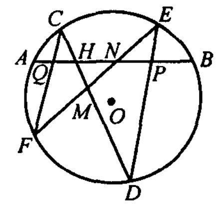


图 11.59

证明 $$1=\frac{\triangle NEP}{\triangle NFQ}\cdot\frac{\triangle FNQ}{\triangle DHP}\cdot\frac{\triangle HPD}{\triangle HQC}\cdot\frac{\triangle CQH}{\triangle ENP}=$$

$$\frac{NE\cdot NP}{NF\cdot NQ}\cdot\frac{FN\cdot FQ}{DH\cdot DP}\cdot\frac{HP\cdot HD}{HQ\cdot HC}\cdot\frac{CQ\cdot CH}{EN\cdot EP}=$$

$$\frac{NP\cdot HP}{NQ\cdot MQ}\cdot\frac{FQ\cdot CQ}{DP\cdot EP}\cdot\frac{NP\cdot HP}{NF\cdot NQ}\cdot\frac{AQ\cdot QB}{AP\cdot PB}\quad ①$$

由 $$AH=a_1,HB=b_1,HQ=x,AN=a_2,BN=b_2,HP=y$$

则 $$AP=a_2+y,BP=b_2-y,AQ=a_1-x,BQ=b_1+x$$

$$PH=BH-BP=b_1-b_2+y,QN=AN-AQ=a_2-a_1+x$$

则①可改写成

$$y(b_1-b_2+y)(a_1-x)(b_1+x)=x(a_2-a_1+x)(b_2-y)(a_2+y)$$

化简整理得

$$b_1y(b_1-b_2+y+x)(a_1-x)=a_2x(a_2-a_1+x+y)(b_2-y)\quad ②$$

又由 $$a_2-a_1=AN-AH=NH=BH-BN=b_1-b_2$$

因此,②为

$$b_1y(a_1-x)=a_2x(b_2-y)$$

故 $$\frac{1}{a_2b_2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a_1}\right)=\frac{1}{a_1b_1}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b_2}\right)$$

现在我们又回到蝴蝶定理,在图形中距弦 AB 的中点 M 等距两点 H、N 作两条弦,有下面的命题.

命题 3 如图 11.60,圆 O 的弦 AB 的中点为 M,H、N 为弦 AB 上两点,且 $HM=NM$,过 H、N 分别作两条弦 CD、EF,联结 DE、CF 分别交 AB 于 Q、P,则 $MP=MQ$.

此题证明利用

$$\frac{\triangle DQH}{\triangle FPN}\cdot\frac{\triangle PFN}{\triangle PCH}\cdot\frac{\triangle CPH}{\triangle EQN}\cdot\frac{\triangle QEN}{\triangle QDH}=1$$

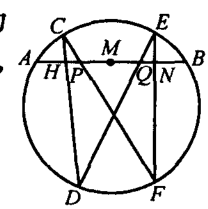


图 11.60

又用"共角定理",通过换算可得结论.

蝴蝶定理又为命题 3 的特殊情况,即蝴蝶定理是 $MN=MH=0$ 的情形.

在图 11.54 中,把弦 AB 移到圆外,M 是圆心在直线 AB 上的射影,H、N 在直线 AB 上,且 $HM=NM$,这个问题就变成:

命题 4 l 是圆 O 外一直线,且 $OM\perp l$,M 是垂足,直线 l 有上 $HM=MN$,

过 H、N 分别向圆作割线 HCD、NEF，联结 FC、DE 并延长分别交 l 于 P、Q，则 $MP=MQ$，如图 11.61 所示.

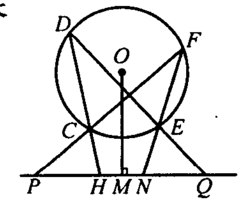


图 11.61

证明　$1=\dfrac{\triangle CPH}{\triangle EQN}\cdot\dfrac{\triangle QEN}{\triangle QDH}\cdot\dfrac{\triangle DHQ}{\triangle FNP}\cdot\dfrac{\triangle PFN}{\triangle PCH}=$

$$\frac{CP\cdot CH}{EQ\cdot EN}\cdot\frac{QE\cdot QN}{QD\cdot QH}\cdot\frac{DH\cdot DQ}{FN\cdot FP}\cdot\frac{PF\cdot PN}{PC\cdot PH}=$$

$$\frac{CH\cdot DH}{EN\cdot FN}\cdot\frac{QN\cdot PN}{QH\cdot PH}\qquad ③$$

由 $OM\perp l$，且 $HM=MN$，知 $OH=ON$. 设 H 到圆 O 的切线为 t_H，N 到圆 O 的切线为 t_N，则

$$t_H=\sqrt{OH^2-r^2},\ t_N=\sqrt{ON^2-r^2},\ r\text{ 是圆 }O\text{ 的半径}$$

即 $t_H=t_N$，而

$$t_H^2=CH\cdot DM,\ t_N^2=EN\cdot FN$$

则③可得

$$QN\cdot PN=QH\cdot PH\qquad ④$$

设
$$PH=x,\ NQ=y,\ HM=MN=a$$
则
$$PN=x+2a,\ QH=y+2a$$
因此，④可改写成

$$y(x+2a)=x(y+2a)$$

则 $x=y$，即 $PH=QN$.

又由 $HM=MN$，故 $PM=QN$.

我们仍又回到蝴蝶定理，将图中弦 AB 向两边等距延长，那么有

命题 5　圆 O 弦 AB 的中点是 M，延长 AB 的两端使 $HA=NB$，过 H、N 分别向圆作割线 HCD、NEF，联结 ED、FC 分别交 AB 于 P、Q，则 $MP=MQ$，如图 11.62 所示.

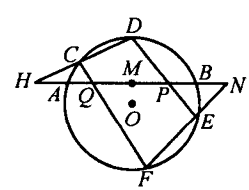


图 11.62

证明　$\angle HCQ+\angle PEN=180^\circ$，$\angle D+\angle F=180^\circ$

$$1=\frac{\triangle CQH}{\triangle EPN}\cdot\frac{\triangle NEP}{\triangle NFQ}\cdot\frac{\triangle FQN}{\triangle DPH}\cdot\frac{\triangle HPD}{\triangle HQC}=$$

$$\frac{CQ\cdot CH}{EP\cdot EN}\cdot\frac{NE\cdot NP}{NF\cdot NQ}\cdot\frac{FQ\cdot FN}{DP\cdot DH}\cdot\frac{HP\cdot HD}{HQ\cdot HC}=$$

$$\frac{CQ\cdot FQ}{EP\cdot DP}\cdot\frac{NP\cdot HP}{NQ\cdot HQ}=\frac{AQ\cdot BQ}{AP\cdot BP}\cdot\frac{NP\cdot HP}{NQ\cdot HQ}\qquad ⑤$$

设
$$AM=BM=a,\ HM=NM=b,\ QM=x,\ PM=y$$

则
$$AQ=a-x,BQ=a+x,AP=a+y,BP=a-y,$$
$$HP=b+y,NP=b-y,HQ=b-x,NQ=b+x$$

于是⑤改写为
$$(a-x)(a+x)(b+y)(b-y)=(a+y)(a-y)(b+x)(b-x)$$

化简,整理得
$$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=0 \qquad ⑥$$

在⑥式中
$$a^2-b^2\neq 0 \quad (\text{因 } a\neq b)$$

故
$$x=y$$

图 11.62 中是向圆作两条割线,若是向圆作一条割线,一条切线,又有下面的结论.

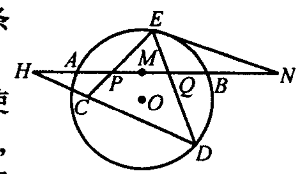


图 11.63

命题 6 圆 O 弦 AB 中点为 M,延长 AB 的两端,使得 $HA=BN$,过 H、N 分别向圆作割线 HCD,切线 NE,联结 EC、ED 分别交 HN 于 P、Q,则 $MP=MQ$,如图 11.63 所示.

证明
$$\angle D+\angle CEN=180^\circ,\angle HCP+\angle QEN=180^\circ$$
$$1=\frac{\triangle CPH}{\triangle EQN}\cdot\frac{\triangle QEN}{\triangle QDH}\cdot\frac{\triangle DQH}{\triangle EPN}\cdot\frac{\triangle PEN}{\triangle PCH}=$$
$$\frac{CP\cdot CH}{EQ\cdot EN}\cdot\frac{QE\cdot QN}{QD\cdot QH}\cdot\frac{DQ\cdot DH}{EP\cdot EN}\cdot\frac{PE\cdot PN}{PC\cdot PH}=$$
$$\frac{CH\cdot DH}{EN^2}\cdot\frac{QN\cdot PN}{QH\cdot PH}=\frac{HQ\cdot HB}{EN^2}\cdot\frac{QN\cdot PN}{QH\cdot PH}=$$
$$\frac{NB\cdot NA}{EN^2}\cdot\frac{QN\cdot PN}{QH\cdot PH}=\frac{QN\cdot PN}{QH\cdot PH} \qquad ⑦$$

设
$$PM=x,MQ=y,HM=MN=a$$

则
$$QN=a-y,QH=a+y,PH=a-x,PN=a+x$$

于是⑦改写成
$$(a+x)(a-y)=(a-x)(a+y)$$

化简,整理得
$$2a(x-y)=0$$

故
$$x=y$$

如果将图 11.63 中线段 HN 移至过圆心,点 M 与圆心重合,这个问题就变成

命题 7 设 EF 为 $\triangle ECD$ 外接圆的直径,过点 F 作切线 FH 与 DC 的延长线交于 H,联结 HO 并延长分别交 EC、ED 及过点 E 的切线于 Q、P、N,则 $QO=$

OP.如图11.64所示.

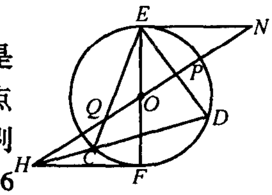


图11.64

容易证明$\triangle OFH \cong \triangle OEN$,则 $OH = ON$,那么就是命题6中的图11.63的线段 HN 过圆心,且 $ON = OH$,点 H、N 分别向圆作割线 HCD,切线 NE,联结 EC、ED 分别交 HN 于 Q、P,应该有 $OP = OQ$.说明了命题7是命题6的特殊情形.

最后,我们给出与坎迪定理等价的一个命题.

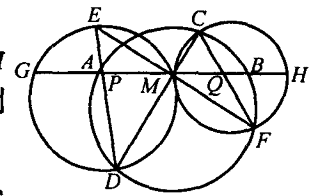


图11.65

命题8 AB 是圆 O 内一条弦,过 AB 上一点 M 任作两弦 CD、EF,设$\triangle EMD$、$\triangle CMF$ 的外接圆分别交直线 AB 于点 G、H.则 $MG - MH = 3(MA - MB)$.

证明 如图11.65,设 ED、CF 分别交 AB 于 P、Q.令 $AM = a$, $BM = b$, $PM = y$, $QM = x$.

由相交弦定理得

$$GP \cdot PM = EP \cdot PD = AP \cdot PB$$

$$HQ \cdot QM = CQ \cdot QF = QB \cdot QA$$

即

$$(MG - y)y = (a - y)(b + y)$$

$$(MH - x)x = (b - x)(a + x)$$

于是

$$MG = \frac{(a - y)(b + y)}{y} + y$$

$$MH = \frac{(b - x)(a + x)}{x} + x$$

$$MG - MH = \frac{(a - y)(b + y)}{y} + y - \frac{(b - x)(a + x)}{x} - x = ab\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + 2(a - b)$$

由坎迪定理得

$$MG - MH = ab\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + 2(a - b) = 3(a - b)$$

此即命题1.反之若

$$MG - MH = 3(MA - MB)$$

则

$$ab\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + 2(a - b) = 3(a - b)$$

即

$$ab\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = a - b$$

于是

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

此即坎迪定理.

第5节　四边形中蝴蝶定理的一些问题(推广与演变)

1."筝形"的一个定值问题[①]

命题1　在"筝形"$ABCD$中,$AB=AD$,$BC=CD$,经AC、BD的交点O任作一直线,分别交AD于E,交BC于F,过E、F作BD的垂线,垂足为E'、F',求证:$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{FF'}$是定值.

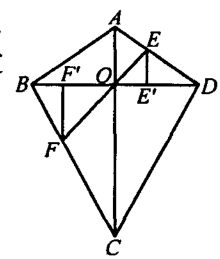


图11.66

证法1　(几何法)如图11.66,因

$$\frac{EE'}{OA}=\frac{DE'}{OD},\frac{FF'}{OC}=\frac{BF'}{OB}$$

则

$$\frac{CA-EE'}{OA}=\frac{OE'}{OD},\frac{OC-FF'}{OC}=\frac{OF'}{OB}$$

上两式相除,有

$$\frac{OC}{OA}\cdot\frac{OA-EE'}{OC-FF'}=\frac{OE'}{OF'}$$

即

$$\frac{OA-EE'}{OA\cdot EE'}=\frac{OC-FF'}{OC\cdot FF'}$$

则

$$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{OA}=\frac{1}{FF'}-\frac{1}{OC}$$

故

$$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{FF'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC}=\text{定值}$$

证法2　(三角法)设

$$\angle EOE'=\angle FOF'=\angle\alpha,\angle EAO=\angle\beta,\angle FCO=\angle\gamma$$

则

$$EE'=OE\sin\alpha$$

在$\triangle AOE$中

$$\frac{OE}{\sin\beta}=\frac{OA}{\sin\angle AEO},OE=OA\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

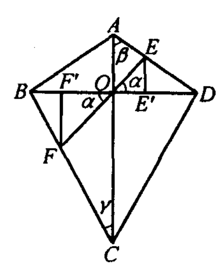


图11.67

则

$$EE'=OA\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

即

$$\frac{1}{EE'}=\frac{1}{OA}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{1}{OA}(1+\cot\alpha\cot\beta)$$

故

$$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{OA}=\frac{1}{OA}\cot\alpha\cot\beta$$

① 孙克铭,张东成."筝形"的一个定值问题[J].中学教研(数学),1991(2):16-37.

同理 $$\frac{1}{FF'}-\frac{1}{OC}=\frac{1}{OC}\cot\alpha\cot\gamma$$

又 $$OA\tan\beta=OD,OC\tan\gamma=OB$$

则 $$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{OA}=\frac{1}{FF'}-\frac{1}{OC}$$

故 $$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{FF'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC}=\text{定值}$$

证法 3　(解析法)由题设知 $AC\perp BD$,建立以 BD 为 x 轴,AC 为 y 轴的直角坐标系,如图 11.68 所示,设 $A(0,a)$、$C(0,c)$、$D(d,0)$、$B(-d,0)$.

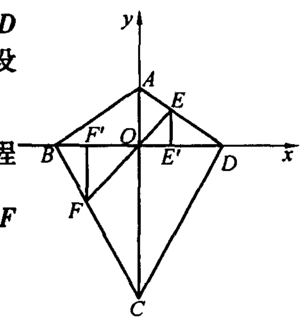


图 11.68

则直线 AD 的方程为 $\frac{x}{d}+\frac{y}{a}=1$,直线 BC 的方程为 $\frac{x}{-d}+\frac{y}{c}=1$,设直线 EF 的方程为 $y=kx$,于是 E、F 的纵坐标分别为 $\frac{adk}{a+dk}$、$\frac{cdk}{dk-c}$,则

$$\frac{1}{EE'}-\frac{1}{FF'}=\frac{a+dk}{adk}+\frac{dk-c}{cdk}=\frac{a+c}{ac}=\text{定值}$$

仿照上面的证法,我们可证如下的两个推广命题.

命题 2　如图 11.69,已知 $AB=AD$,$BC=CD$,过 AC、BD 的交点 O 任作直线交 AD 的延长线于 E,交 BC 于 F,过 E、F 作 BD 的垂线 EE'、FF',垂足为 E'、F'.则 $\frac{1}{EE'}-\frac{1}{FF'}=$ 定值.

命题 3　如图 11.70,已知 $AB=AD$,$CB=CD$,过 AC、BD 的交点 O 任作两条直线,分别交 AD 的延长线于 E,交 BC 于 F,交 AB 的延长线于 G,交 CD 于 H,GF、EH 分别交 BD 于 I、J,则 $OI=OJ$.

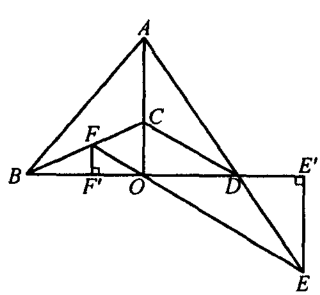


图 11.69

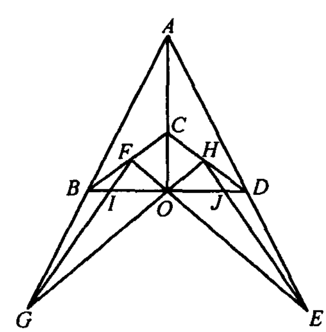


图 11.70

2."筝形"性质的推广①②③

原命题 在筝形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$,经过 AC、BD 的交点 O 任作两条直线,分别交 AD 于 E,交 BC 于 F,交 AB 于 G,交 CD 于 H,GF、EH 分别交 BD 于 I、J.求证:$OI=OJ$.如图 11.71(a)所示.

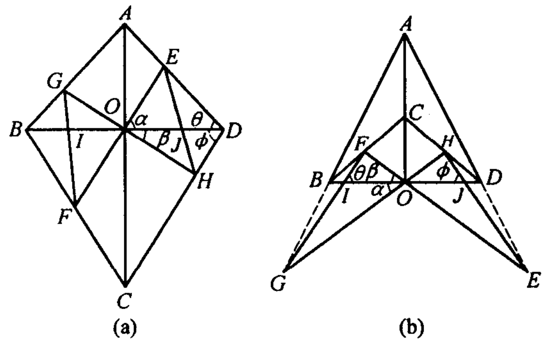


图 11.71

若将原命题的条件"在筝形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$,"变换为"在凹四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$.(图 11.71(b))"结论仍然成立.

推广 1 在凹四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$,过对角线 AC、BD 的交点 O 任作两条直线,分别交直线 AD、BC、AB、CD 于 E、F、G、H,GF、EH 分别交 BD 于 I、J.则 $OI=OJ$.

更进一步,若将原命题中的条件"经过 AC、BD 的交点 O 任作两条直线"变换为"在直线 BD(除点 B、D 外)上任取一点 O,过 O 任作两条直线,可以得到一般的结论.

推广 2 在筝形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$,在直线 BD(除 B、D 两点外)上任取一点 O,过 O 任作两条直线,分别交直线 AD、BC、AB、CD 于 E、F、G、H,GF、EH 分别交直线 BD 于 I、J.则 $\frac{OI}{OB}=\frac{OJ}{OD}$.如图 11.72(a)、(b)所示.

推广 3 在凹四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$BC=CD$,在直线 BD(除 B、D 两点外)上任取一点 O,过 O 任作两条直线,分别交 AD、BC、AB、CD 于 E、F、G、H,GF、EH 分别交直线 BD 于 I、J.则 $\frac{OI}{OB}=\frac{OJ}{OD}$.如图 11.73(a)、(b)所示.

① 井中.蝴蝶定理的新故事[J].中学数学,1992(1):1-5.
② 熊光汉.一道全国冬令营选拔赛题的推广[J].中学教研,1992(1):43.
③ 李裕民.四边形中的蝴蝶定理和坎迪定理[J].中学数学(苏州),1995(5):22-23.

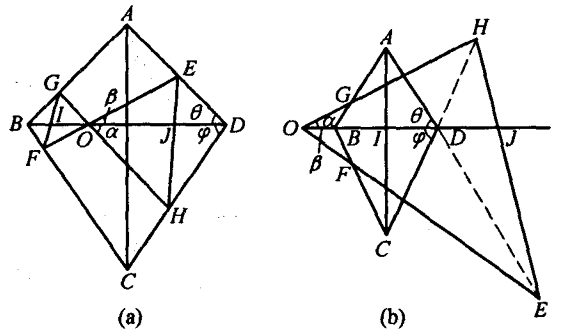


图 11.72

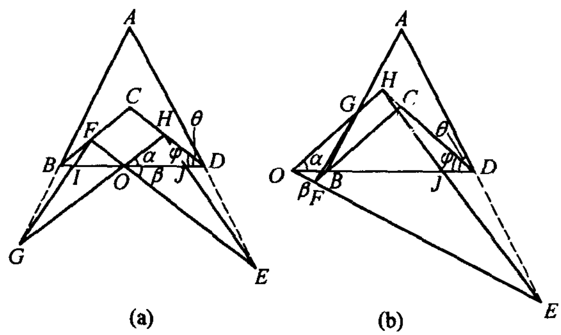


图 11.73

证明　如图 11.72(a)、(b)及图 11.73(a)、(b)，设

$$\angle ABD = \angle ADB = \theta, \angle CBD = \angle CDB = \varphi$$

$$\angle GOB = \angle HOD = \alpha, \angle FOB = \angle EOD = \beta$$

由正弦定理有

$$\frac{BG}{OG} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \frac{OH}{DH} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \frac{DE}{OE} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}, \frac{OF}{BF} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$$

则

$$\frac{BG}{OG} \cdot \frac{OH}{DH} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{OF}{BF} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$$

即

$$\frac{OH}{OF} \cdot \frac{OE}{OG} = \frac{DE \cdot DH}{BG \cdot BF}$$

从而

$$\frac{S_{\triangle OEH}}{S_{\triangle OGF}} = \frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle BGF}}$$

即

$$\frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle OGF}} = \frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle OEH}}$$

从而有$\frac{BI}{OI}=\frac{DJ}{OJ}$,故$\frac{OI}{OB}=\frac{OJ}{OD}$.

当 O 为 AC、BD 的交点时,则有 $OB=OD$,从而得到原命题及推广 1 的结论.

若把原命题中的条件"在筝形 $ABCD$ 中,$AB=CD$,$BC=CD$"变换为"任意四边形 $ABCD$"便可得到更一般性的结论.

推广 4 如图 11.74(a)、(b),在任意四边形 $ABCD$ 中,经过对角线 AC、BD 的交点 O 任作两条直线,分别交直线 AD、BC、AB、CD 于 E、F、G、H,GF、EH 分别交 BD 于 I、J.则

$$\frac{OI\cdot OB}{BI}=\frac{OJ\cdot OD}{DJ}$$

或

$$\frac{1}{OI}-\frac{1}{OB}=\frac{1}{OJ}-\frac{1}{OD}$$

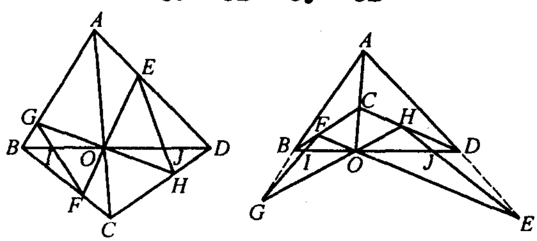


图 11.74

证法 1 $\frac{OI}{BI}\cdot\frac{DJ}{OJ}=\frac{S_{\triangle FOG}}{S_{\triangle BFG}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle EOH}}=\frac{S_{\triangle FOG}}{S_{\triangle EOH}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle DAC}}\cdot\frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BFG}}=$

$$\frac{OF\cdot OG}{OE\cdot OH}\cdot\frac{DE\cdot DH}{DA\cdot DC}\cdot\frac{OD}{OB}\cdot\frac{BC\cdot AB}{BF\cdot BG}=\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle BED}}\cdot\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle BHD}}=$$

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{S_{\triangle BHD}}{S_{\triangle BCD}}\cdot\frac{OD}{OB}\cdot\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BFD}}\cdot\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BGD}}=\frac{OD}{OB}$$

故

$$\frac{OI\cdot OB}{BI}=\frac{OJ\cdot OD}{DJ}$$

证法 2 分别为 G、F、E、H 作平行于 AC 的线段 h_1、h_1'、h_2、h_2',于是有

$$\frac{BG}{DE}=\frac{AB\cdot h_1}{AD\cdot h_2},\frac{BF}{DH}=\frac{BC\cdot h_1'}{CD\cdot h_2'},\frac{OE}{OF}=\frac{h_2}{h_1'},\frac{OH}{OG}=\frac{h_2'}{h_1}$$

又

$$\frac{BI}{OI}\cdot\frac{OJ}{DJ}=\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle OFG}}\cdot\frac{S_{\triangle OEH}}{S_{\triangle DEH}}=\frac{BG\cdot BF\sin\angle ABC\cdot OE\cdot OH}{OG\cdot OF\cdot DE\cdot DH\sin\angle ADC}=$$

$$\frac{BG}{DE}\cdot\frac{BF}{DH}\cdot\frac{OE}{OF}\cdot\frac{OH}{OG}\cdot\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ADC}=$$

$$\frac{AB\cdot h_1}{AD\cdot h_2}\cdot\frac{BC\cdot h_1'}{CD\cdot h_2'}\cdot\frac{h_2}{h_1'}\cdot\frac{h_2'}{h_1}\cdot\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ADC}=$$

$$\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}{AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{OB}{OD}$$

因此
$$\frac{BI}{OI\cdot OB}=\frac{DJ}{OJ\cdot OD},\frac{OB-OI}{OI\cdot OB}=\frac{OD-OJ}{OJ\cdot OD}$$

即
$$\frac{1}{OI}-\frac{1}{OB}=\frac{1}{OJ}-\frac{1}{OD}$$

推广 5　如图 11.75,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,直线 MN 过点 O 且与对边 BC、AD 分别交于点 M、N,过 O 任作两条直线 EF、GH 分别交对边 AB、CD 于点 E、F、G、H,联结 GF、EH 分别交直线 MN 于点 I、J,如果有 $MO=NO$,那到 $IO=JO$.

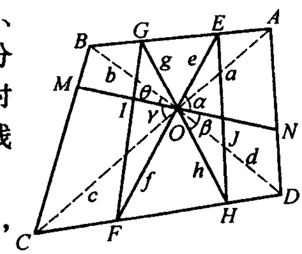


图 11.75

证明　$AO=a$, $BO=b$, $CO=c$, $DO=d$, $EO=e$, $FO=f$, $GO=g$, $HO=h$, $\angle EON=\alpha$, $\angle HON=\beta$, $\angle COM=\gamma$, $\angle BOM=\theta$,则在$\triangle GFO$ 中,由三角形分角线计算公式有

$$\frac{1}{IO}=\frac{g\sin\beta+f\sin\alpha}{gf\sin(\alpha+\beta)}\qquad ①$$

同理,在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中,分别有

$$g=\frac{ab\sin(\pi-\theta-\gamma)}{a\sin(\pi-\beta-\gamma)+b\sin(\beta-\theta)}=\frac{ab\sin(\theta+\gamma)}{a\sin(\beta+\gamma)+b\sin(\beta-\theta)}\qquad ②$$

$$f=\frac{cd\sin(\pi-\theta-\gamma)}{c\sin(\alpha-\gamma)+d\sin(\pi-\theta-\alpha)}=\frac{cd\sin(\theta+\gamma)}{c\sin(\alpha-\gamma)+d\sin(\theta+\alpha)}\qquad ③$$

将②、③代入①式,整理得

$$\frac{1}{IO}=\frac{\frac{\sin\alpha\sin(\beta-\theta)}{a}+\frac{\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{b}}{\sin(\theta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\frac{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}{c}+\frac{\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)}{d}}{\sin(\theta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}$$

同理可得

$$\frac{1}{JO}=\frac{\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}{a}+\frac{\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)}{b}}{\sin(\theta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\frac{\sin\beta\sin(\beta-\theta)}{c}+\frac{\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{d}}{\sin(\theta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}$$

故有
$$\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\sin\theta+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)\sin\gamma}{\sin(\theta+\gamma)}$$

又因为

$$\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}=\frac{c\sin\gamma+b\sin\theta}{bc\sin(\theta+\gamma)}-\frac{a\sin\gamma+d\sin\theta}{ad\sin(\theta+\gamma)}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)\sin\gamma}{\sin(\theta+\gamma)}$$

则
$$\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$$

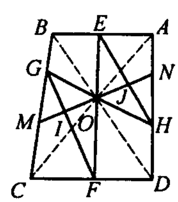
而 $MO=NO$,故 $IO=JO$.

从上面的证明过程可以发现,我们已经证明了一个更一般的结论,当点 O 不一定是 MN 之中点时,仍可得 $\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$. 因此有:

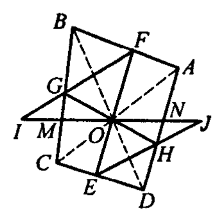
推广 6 如图 11.75(其中点 O 不一定是 MN 的中点),四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,直线 MN 过点 O 且与对边 BC、AD 分别相交于点 M、N,过 O 任作两条直线 EF、GH,分别交对边 AB、CD 于点 E、F、G、H,联结 GF、EH 分别交直线 MN 于点 I、J. 则有 $\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$.

沿用上述证法,不难得到另一结论:

推广 7 如图 11.76(a)、(b),四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,直线 MN 过点 O 且与对边 BC、AD 分别相交于点 M、N,过点 O 任作两条直线 EF、GH 分别各交对边 AB、CD 于点 E、F,交 BC、AD 于点 G、H,作直线 GF、EH 分别交直线 MN 于点 I、J. 则有 $\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$. 特别地,如果 $MO=NO$,那么 $IO=JO$.(证明略)



(a)



(b)

图 11.76

显然,在上述推广 6 中,当直线 MN 与 BD 重合时,结论仍然成立. 故对于图 11.76(a)就变成筝形性质推广 1 和 2;对于图 11.76(b),则相应可得:

推广 8 如图 11.77,在四边形 $ABCD$ 中,若过两对角线交点 O 任引两条直线,它们分别各交一组对边于点 E、F、G、H,联结 GF、EH 并分别延长交直线 BD 于点 I、J. 则有

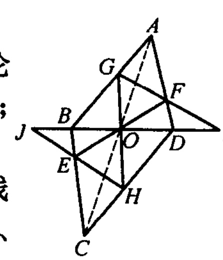


图 11.77

$\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$;特别地,当 O 为 BD 之中点时,则有 $IO=JO$.

若过点 O 的任意两条直线中有一条与对角线重合时,还可得如下推论:

推论　如图 11.78,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,直线 MN 过点 O 且与对边相交于点 M、N,过 O 任作直线 EF 交四边形中一组对边于 E、F,作直线 BF、DE 分别交直线 MN 于点 I、J,则有 $\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}=\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}$;特别地,如果 $MO=NO$,那么 $IO=JO$.

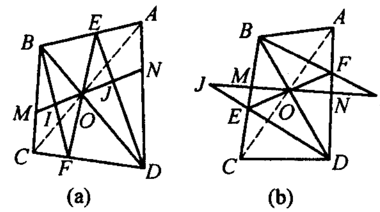


图 11.78

综观上述讨论可知:如果我们把四边形的四条边(包括顶点)看做圆周,那么上述定理的形式与圆中蝴蝶定理、坎迪定理的形式完全相同,并且还将在下面论证它们之间的内在联系.因此,我们可以把上述所有性质概括成如下两个定理:

四边形的蝴蝶定理　过四边形对角线的交点 O 的线段 MN 被点 O 所平分,过 O 的任意两条直线为 EF、GH,点 M、N、E、F、G、H 均在四边形的边或顶点上,直线 GF、EH 分别交直线 MN 于点 I、J,那么有 $IO=JO$.如图 11.79 所示.

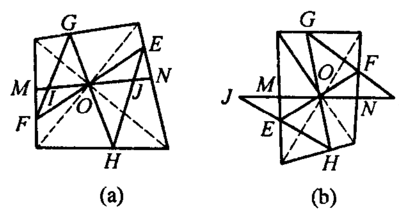


图 11.79

四边形的坎迪定理　过四边形对角线的交点 O 的任意三条直线 MN、EF、GH 分别与四边形的边或顶点相交于点 M、N、E、F、G、H,直线 GF、EH 分别交直线 MN 于点 I、J,则有 $\left|\frac{1}{IO}-\frac{1}{JO}\right|=\left|\frac{1}{MO}-\frac{1}{NO}\right|$.如图 11.73 所示.

3.四边形蝴蝶定理的演变

命题 4　过两直线间线段 AB 的中点 M,引两直线间的任意两条线段 CD 和 EF(C、E 在同一条直线上),又 CF、ED 分别交 AB 于 P、Q,则 $PM=MQ$.

证明　两直线平行的情形不过是平行截割定理的特例,故仅证两直线交于 S 的情形,如图 11.80(a)所示.

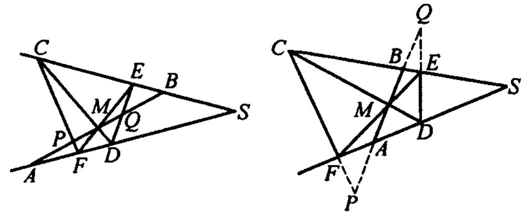
依次考虑直线 CPF 截 $\triangle MAD$, DQE 截 $\triangle MBC$, EMF 截 $\triangle SCD$ 和 $\triangle SAB$.据梅涅劳斯定理,得(不考虑线段方向)

$$\frac{MP}{PA}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CM}=1$$

$$\frac{MD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BQ}{QM}=1$$

$$\frac{SE}{EC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DF}{FS}=1$$

$$\frac{SF}{FA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BE}{ES}=1$$



(a) (b)

图 11.80

四式相乘,化简,得

$$\frac{MP}{PA}\cdot\frac{BQ}{QM}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

由 $AM=MB$,得

$$\frac{MP}{PA}\cdot\frac{BQ}{QM}=1,\frac{BQ}{QM}=\frac{PA}{MP}=1,\frac{BQ+QM}{QM}=\frac{PA+MP}{MP}$$

即$\frac{BM}{QM}=\frac{MA}{MP}$.故 $QM=MP$.

注 此命题即为直线中的蝴蝶定理.对于图 11.80(b)的情形,上述证明仍适用,但最后略有改变.

命题 5 线段 AB 两端点分别在$\triangle KGH$ 的边 KG、KH 上,P 是 AB 的中点,过 P 作直线 CD、EF 交 GH 于 C、E,交 HK 于 D,交 KG 于 F.联结 FC、DE 并交 AB 于 M、N,则 $PM=PN$.

事实上,如图 11.81 所示,可类似于命题 4 而证.

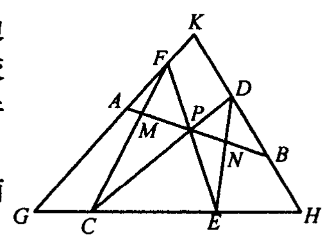


图 11.81

注 此命题即为三角形中的蝴蝶定理.

第 12 章　1990 ~ 1991 年度试题的诠释

试题 A　四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P．设 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$ 和 $\triangle DAP$ 的外接圆圆心分别是 O_1、O_2、O_3、O_4．求证：OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点．

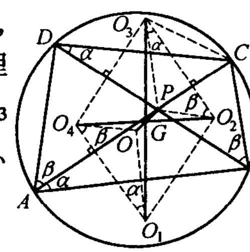


图 12.1

证法 1　如图 12.1，联结 O_1O_2、O_2O_3、O_3O_4、O_4O_1，易证 $O_1O_4 \perp AC$，$O_2O_3 \perp AC$，则 $O_1O_4 /\!/ O_2O_3$．同理 $O_1O_2 /\!/ O_3O_4$．则 $O_1O_2O_3O_4$ 是平行四边形，从而 O_1O_3 与 O_2O_4 相交于 $O_1O_2O_3$ 的中点 G，联结 OO_1、OO_4、PO_2、PO_3、CO_3，记

$$\angle CAB = \angle CDB = \alpha, \angle CAD = \angle CBD = \beta$$

利用 $$OO_1 \perp AB, O_1O_4 \perp AC$$

可证 $$\angle OO_1O_4 = \angle CAB = \alpha$$

再利用 $$\angle PO_3O_2 = \frac{1}{2}\angle PO_3C = \angle BDC$$

可证 $$\angle PO_3O_2 = \alpha$$

所以 $$\angle OO_1O_4 = \angle PO_3O_2$$

同理 $$\angle OO_4O_1 = \angle PO_2O_3$$

而 $O_1O_4 = O_2O_3$，所以 $\triangle OO_1O_4 \cong \triangle PO_2O_3$．

因为 $O_1O_4 /\!/ O_2O_3$，所以 $\angle OO_1O_4 = \angle O_1O_3O_2$，所以

$$\angle OO_1O_3 = \angle O_3O_1O_4 - \angle OO_1O_4 = \angle O_1O_3O_2 - PO_3O_2 = \angle O_1O_3P$$

所以 $$OO_1 /\!/ PO_3$$

又 $OO_1 = PO_3$，所以 OO_1PO_3 是平行四边形．所以 O_1O_3 与 OP 也相交于 O_1O_3 的中点 G．所以，OP、O_1O_3、O_2O_4 相交于同一点 G．

证法 2　（由余凤冈给出）如图 12.2，联结 OO_4 并延长交 AD 于 E，联结 O_2P 并延长交 AD 于 F．联结 OO_2、PO_4、O_2B、O_2C．

在 $\triangle PBC$ 中，O_2 是 $\triangle PBC$ 的外心，有 $O_2P = O_2B = O_2C$，因而 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$．那么

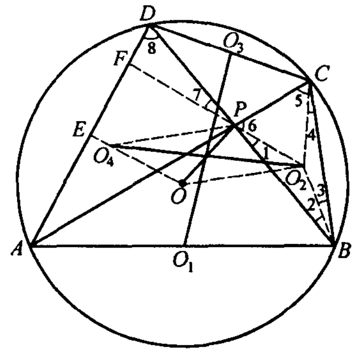


图 12.2

$$\angle 1+\angle 4+\angle 5=90^\circ$$

在$\triangle PDF$中

$$\angle 7=\angle 1,\angle 8=\angle ACB=\angle 4+\angle 5$$

故 $$\angle 7+\angle 8=\angle 1+\angle 4+\angle 5=90^\circ$$

于是 $$\angle PFD=90^\circ$$

从而 $$O_2F\perp AD$$

又 $OE\perp AD$(两相交圆的连心线垂直于两相交圆的公共弦),所以 $OE\parallel O_2F$,即 $OO_4\parallel O_2P$.

同理

$$OO_2\parallel O_4P$$

故 OO_2PO_4 是平行四边形.从而,对角线 OP 与 O_2O_4 互相平分.

同理可证,$OO_1\parallel O_3P$,$OO_3\parallel O_1P$.

故 OO_1PO_3 是平行四边形.从而,对角线 OP 与 O_1O_3 互相平分.

因此,OP、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点于它们的中点.

证法 3 (此证法及后 2 种证法由江苏尹广金给出)如图 12.3,过 P 作 $TP\perp O_3P$,则 TP 与圆 O_3 切于 P,于是$\angle TPD=\angle PCD=\angle PBA$,即有 $TP\parallel AB$,而有 $O_3P\perp AB$,又 $OO_1\perp AB$,故 $OO_1\parallel O_3P$,同理 $OO_3\parallel O_1P$,于是四边形 O_1PO_3O 是平行四边形,故 O_1O_3 平分 OP.

同理可证 O_2O_4 平分 OP.

故 OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

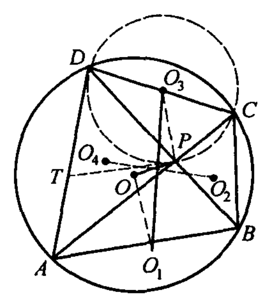


图 12.3

证法 4 如图 12.4,设圆 O_2 与圆 O_4 交于 P、M.由于三圆心 O、O_2、O_4 不共线,三公弦共点于根心点 S,则$\angle SDB=\angle SCA=\angle SMB$,因此 S、D、M、B 四点共圆,由此得

$$PM\cdot PS=PD\cdot PB=r^2-PO^2 \quad ①$$

$$SM\cdot PS=SC\cdot SB=SO^2-r^2 \quad ②$$

(其中,r 为圆 O 的半径)

由①+②得

$$SO^2 - PO^2 = PS(PM + SM) = (SM - PM)(SM + PM) = SM^2 - PM^2$$

故 $OM \perp SM$,又 O_2O_4 垂直平分 PM,于是 O_2O_4 平分 OP,同理 O_1O_3 平分 OP,因此 OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

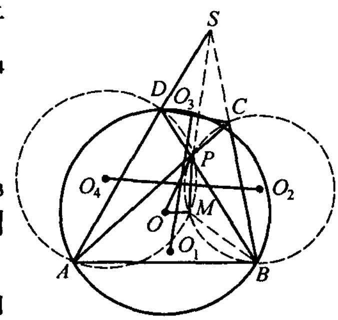


图 12.4

证法 5　如图 12.5,分别作圆 O_1、圆 O、圆 O_3 的直径 AE、AF、PG,联结 PE、BE、CF、BF、GC,则 E、B、F 与 G、C、F 三点共线,且 $GF /\!/ PE$.

延长 GP 交 AB 于 H,由 $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$ 可知 A、H、C、G 四点共圆.于是 $\angle AHG = \angle ACG = 90°$.又 $\angle ABF = 90°$,故 $GP /\!/ FE$,因此四边形 $GPEF$ 是平行四边形,于是 $O_3P \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}FE$.

联结 OO_1,则 $OO_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}FE$.故 $OO_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} O_3P$.因此四边形 O_1PO_3O 是平行四边形.于是,O_1O_3 平分 OP.同理,O_2O_4 平分 OP.故 OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

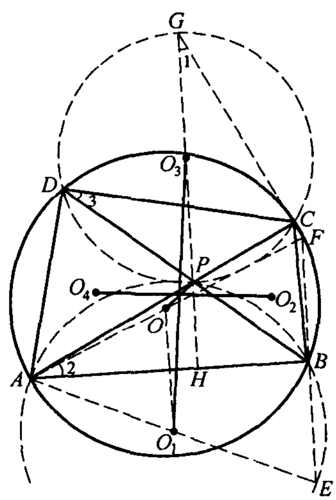


图 12.5

证法 6　由于本题涉及的圆较多,于是可考虑反演变换,取 P 为反演中心,P 关于圆 O 的幂为反演基圆半径,则圆 O 反演为本身,圆 $O_i(i=1,2,3,4)$ 反演为四边形 $ABCD$ 各边所在直线,过点 P 的直线也反演为本身.

由直线 PO_2 与圆 O_2 正交,可知它们的反形也正交,即 $PO_2 \perp AD$.

又易知 $O_4O \perp AD$,所以 $PO_2 /\!/ O_4O$.同理,$PO_4 /\!/ O_2O$.

所以 PO_2OO_4 为平行四边形,PO、O_2O_4 相交于 PO 的中点.

同理,PO、O_1O_3 也相交于 PO 的中点.故 PO、O_1O_3、O_2O_4 三直线共点.

试题 B1　平面上有一个凸四边形 $ABCD$.

(1)如果平面上存在一点 P,使得 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 面积都相等,问四边形 $ABCD$ 应满足什么条件?

(2)满足(1)的点 P,平面上最多有几个?证明你的结论.

解法1 (i)先看 P 在四边形内的情形.

若 A、P、C 三点共线,B、P、D 三点也共线,则四边形 $ABCD$ 为平行四边形,P 为两条对角线的交点.

若 A、P、C 三点不共线,由于$\triangle PAB$ 与$\triangle PAC$ 等积,故直线 AP 必过对角线 BD 的中点.同理知直线 CP 也必过 BD 中点.因而 P 为 BD 中点.显然,这时$\triangle ABD$ 与$\triangle BCD$ 等积.这意味着若形内有满足要求的点 P,则四边形 $ABCD$ 被它的一对角线按面积平分.容易看出,这个条件还是充分的.

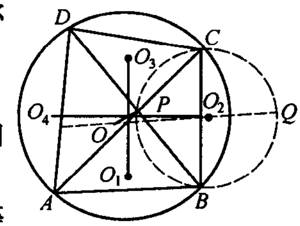


图 12.6

(ii)再看点 P 在形外的情形,如图 12.7 所示.

因为$\triangle APB$ 与$\triangle APD$ 等积,故 $AP/\!/BD$.同理 $AC/\!/PD$.所以四边形 $AEDP$ 为平行四边形.这时,$S_{\triangle AED}=S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.此外,容易看出,延长四边形的两邻边,比如延长 BA、DA 所形成的角域中的任何点 Q 都不满足要求.这就是说,若形外一点 P 满足要求,则四边形的两条对角线将四边形分成的四个三角形中,必有一个面积是四边形面积的一半.下面我们来证明,这个条件也是充分的.

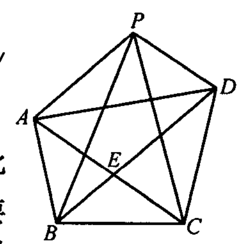


图 12.7

设 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.过 A 作 BD 的平行线,过 D 作 CA 的平行线,两线交于点 P,则四边形 $AEDP$ 为平行四边形且 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.由于 $S_{\triangle ABE}<S_{\triangle AED}$,故 $BE<ED$.所以 PB 在五边形 $PABCD$ 之内而不会在形外.同理 PC 也在形内.从而

$$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APD}=S_{\triangle PDC}$$

这样又有
$$S_{\triangle PBC}=S_{PABCD}-S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAD}$$
即证明了点 P 满足题中要求.

(iii)由(i)和(ii)可知四边形 $ABCD$ 之外最多有一点 P 满足要求,且形内和形外不能同时具有满足题中要求的点.此外,若四边形的两条对角线都按面积平分四边形,则易证四边形为平行四边形,故形内最多也只有一点 P 满足要求.综上可知,满足(i)的点 P,最多有一点.

解法2 (由吴伟朝给出)

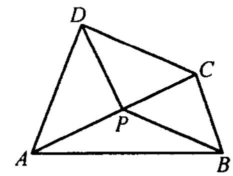


图 12.8

(1)(i)当 P 在 $ABCD$ 内部时，如图 12.8 所示，由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}$ 知，点 A 和 C 到直线 BP 的距离相等，由 $S_{\triangle BAP}=S_{\triangle DAP}$ 知 B、D 与 AP 等距.

同理可知，A、C 与 DP 等距，B、D 与 CP 等距，于是，如果 B、P、D 三点不共线，则因 A、C 与 BP、DP 均等距，可知必有 BP、DP 过 AC 的中点，因而 P 就是 AC 的中点，即 A、P、C 三点共线，而且 AC 平分对角线 BD，此时

$$S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

故知四边形 $ABCD$ 应满足的条件是：存在一条对角线平分另一条对角线，或者存在一条对角线平分 $ABCD$ 的面积.

易证此二条件是等价的，所以，在 $ABCD$ 内部存在点 P 使 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle BCP}=S_{\triangle CDP}=S_{\triangle DAP}\Leftrightarrow ABCD$ 的一条对角线平分另一条对角线 $\Leftrightarrow ABCD$ 的一条对角线平分 $ABCD$ 的面积①.

易知当此条件满足时，具有所述性质的点 P 只能有一个，即它位于平分四边形 $ABCD$ 的面积的对角线的中点上，如果两对角线都把四边形的面积平分，则由上述证明过程知 P 即是.

(ii)当 P 在 $ABCD$ 的外部时，使 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}=S_{\triangle CDP}=S_{\triangle DAP}$.

下面先来证明：点 P 不可能在四边形某个内角的对顶角的内部或角边上.

假设点 P 在 $\angle BAD$ 的对顶角 $\angle B'AD'$ 内或角边上，如图 12.9 所示，设对角线 CA 的延长线为 AC'，C' 在 $\angle B'AD'$ 的内部，不妨设 P 在 $\angle C'AD'$ 的内部或角边上，则点 A 必在 $\triangle PCD$ 内部或角边上(但 A 与 C 不重合)，从而 $S_{\triangle DAP}<S_{\triangle CDP}$，这与已知条件矛盾.

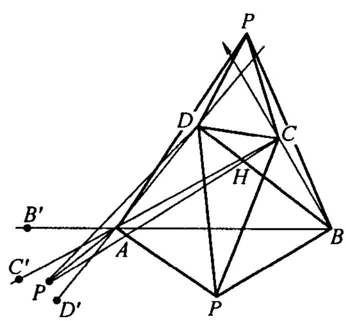


图 12.9

由上可知，点 P 必在四边形的某两对边所在直线所夹的角(此角包含了 $ABCD$)内(仿上可证：点 P 不可能在此角的对顶角的内部或边上)，因此 P 与 A、B、C、D 可以构成一个凸五边形.

如图 12.9 所示，有

$$S_{ABCD}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle CDP}+S_{\triangle DAP}-S_{\triangle ABP}$$

即得
$$S_{ABCD}=2S_{\triangle ABP}$$
由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}$ 知 $AC\parallel PB$(因为 A、C 到直线 PB 的距离相等),由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle DAP}$ 知 $DB\parallel PA$,设 AC 与 BD 相交于点 H,则 $PBHA$ 是一个平行四边形,所以
$$S_{\triangle ABH}=S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

反之,设 $S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$($H$ 为 AC 与 BD 的交点),作点 P 使 $PBHA$ 是一个平行四边形,由 $PB\parallel AH$ 及 $PA\parallel BH$ 得
$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP},S_{\triangle ABP}=S_{\triangle DAP}$$
所以
$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}=S_{\triangle DAP}$$
由 $PA\parallel BC$ 知,$\angle PAB=\angle ABD$,所以
$$\angle PAD=\angle PAB+\angle BAD=\angle ABD+\angle BAD<180^\circ$$
同理由 $PB\parallel AH$ 知 $\angle PBC<180^\circ$,从而 P、B、C、D、A 构成一个凸五边形.再由
$$S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

知
$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}S_{ABCD},2S_{\triangle ABP}=S_{ABCD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}$$
从而
$$S_{\triangle CDP}=3S_{\triangle ABP}-2S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABP}$$
所以
$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}=S_{\triangle CDP}=S_{\triangle DAP}$$

总之,在 $ABCD$ 外部存在一点 P,使 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BCP}=S_{\triangle CDP}=S_{\triangle DAP}\Leftrightarrow S_{\triangle ABH}$、$S_{\triangle BCH}$、$S_{\triangle CDH}$ 和 $S_{\triangle DAH}$ 中(H 为 AC 与 BD 的交点)有一个是 $ABCD$ 面积的一半②.

(2)容易知道条件①与②是不相容的(即①与②中只能有一个是成立的)再由(1)的讨论可知无论①与②中哪一个成立,至多只能有一个点 P 满足要求,因此满足(1)的点 P,平面上最多只有一个.

试题 B2 地面上有 10 只小鸟在啄食,其中任何 5 只鸟中至少有 4 只在一个圆上,问有鸟最多的一个圆上最少有几只鸟?

解法 1 用 10 个点来表示 10 只小鸟,如果 10 点中的任何 4 点都共圆,则 10 点全在同一个圆上.以下设 A、B、C、D 这 4 点不共圆.此时,过其中任何不共线的 3 点都可以作一个圆,最多可作出 4 个不同的圆 S_1、S_2、S_3、S_4,最少可作出 3 个不同的圆.对于这两种情形,下面的论证完全一致,故可以只就有 4 个不同的圆的情形来证明.

从其余 6 点 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6 中任取一点 P_i 与 A、B、C、D 组成 5 点

组,按已知,其中必有 4 点共圆.所以,点 P_i 必在 S_1、S_2、S_3、S_4 之一上.由 P_i 的任意性知后 6 个点中每点都必落在 4 圆之一上,由抽屉原理知必有两点落在同一圆上,即 10 点中必有 5 点共圆.

设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 在同一个圆 C_1 上.P、Q 两点不在圆 C_1 上.

(1)考察五点组(A_1、A_2、A_3、P、Q),其中必有 4 点共圆 C_2.显然,$C_2 \neq C_1$,因而 A_1、A_2、A_3 不能全在圆 C_2 上,否则 C_2 与 C_1 重合.不妨设 A_1、A_2、P、$Q \in C_2$,于是 A_3、A_4、$A_5 \notin C_2$.

(2)考察五点组(A_3、A_4、A_5、P、Q),其中必有 4 点共圆 C_3.显然 $C_3 \neq C_1$,由此可设 A_3、A_4、P、$Q \in C_1$,于是有 A_1、A_2、$A_5 \notin C_3$.可见,$C_3 \neq C_2$.

(3)考察五点组(A_1、A_3、A_5、P、Q),其中必有 4 点共圆 $C_4 \neq C_1$.因而 A_1、A_3、A_5 不能全在 C_4 上,故有 P、$Q \in C_4$ 且 A_1 与 A_3 中至少 1 点属于 C_4.

若 $A_1 \in C_4$,则 C_4 重合于 C_2.但因 A_3、$A_5 \notin C_2$,而二者之一属于 C_4,矛盾.

若 $A_3 \in C_4$,则 C_4 重合于 C_3.但因 A_1、$A_5 \notin C_3$,故亦不能属于 C_4,此不可能.

综上,我们证明了圆 C_1 之外至多有 10 点中的 1 点,即圆 C_1 上至少有 9 点.另一方面,10 个已知点中 9 点共圆,另 1 点不在此圆上的情形显然满足题中要求,故知有鸟最多的一个圆上最少有 9 只鸟.

解法 2　我们用 10 个点来代表 10 只鸟并先来证明 10 点中必有 5 点共圆.

若不然,则 10 点中的任何 5 点都不共圆,但其中总有 4 点共圆,下面称之为四点圆.10 个已知点共可构成 $C_{10}^5 = 252$ 个五点组,每组都可作出一个四点圆,于是共有 252 个四点圆(包括重复计数).每个四点圆恰属于 6 个五点组,因而共有 42 个不同的四点圆.

42 个四点圆上共有 168 个已知点,而不同的已知点共有 10 个,故由抽屉原理知有一点 A,使得过点 A 的四点圆至少有 17 个.

过点 A 的 17 个四点圆上除 A 之外每圆还有 3 个已知点,共有 51 个已知点.于是由抽屉原理知又有一点 $B \neq A$,使得上述 17 个圆中至少有 6 个过点 B.这就是说,过 A、B 两点的四点圆至少有 6 个.

这 6 个四点圆中的每个圆上除 A、B 外还有两个已知点,共有 12 个点,它们都是除 A、B 之外的 8 个点.由抽屉原理知又有一点 C,使上述 6 圆中至少有两圆过点 C,即过 A、B、C 这 3 点的圆至少两个,从而这两圆重合.但这两个四点圆的四点组不同,故此圆上至少有 5 个已知点,矛盾.从而证明了必有 5 点共

圆.

以下证明同解法 1.

解法 3 我们用 10 个点来代表 10 只鸟并先来证明 10 点中必有 5 点共圆.

若不然,则像解法 2 中一样地可证,10 点共可作出 42 个不同的四点圆.每个圆上恰有 4 个已知点,42 个四点圆上共有 168 个已知点.故由抽屉原理知存在一点 A,使得过 A 的四点圆至多有 16 个.于是除点 A 之外的 9 点间还至少有 26 个四点圆.这时,每个四点圆恰属于 5 个五点组,共属于 130 个五点组.但 9 个点共可组成 $C_9^5=126$ 个五点组,由抽屉原理知有两个四点圆属于同一个五点组,即 5 点共圆,矛盾.从而证明了 10 点中必有 5 点共圆.

以下证明同解法一.

解法 4 设 10 点中的 A、B、C、D 四点共圆.以 A 为中心进行反演变换,于是 B、C、D 这 3 点的像 B'、C'、D' 在一条直线上且连同其余 6 点的像点的 9 点中,任何 4 点或共圆,或其中有 3 点共线.

为简单计,我们将 $B,C,D,\cdots,I,J$ 的反演像点仍记为 $B,C,D,\cdots,I,J$,若有两点 E、F 在直线 BC 之外,则考察 3 个四点组 $\{E、F、B、C\}$,$\{E、F、B、D\}$,$\{E、F、C、D\}$.显然,其中恰有一组四点共圆,不妨设 E、F、C、D 四点共圆.于是 B、F、E 三点共线.考虑 B、C、F 及第七点的像点 G,则 G 在圆 BCF 上或在 $\triangle BCF$ 的某条边所在的直线上.

(1)若 G 在直线 BC 上,则 G、D、E、F 四点既不共圆,其中任何三点也不共线,矛盾.故知 G 不在直线 BC 上.同理,G 也不在直线 BF 上.

(2)若 G 在直线 CF 上,则 G 不在圆 DEF 上,故 G 只能在直线 DE 上,即 G 为直线 CF 与 DE 的交点.显然,这样的交点至多一个,参看图 12.10.

(3)若 G 在圆 BCF 上,则 G 不在圆 CDF 上,也不在直线 CD 和 CF 上,故 G 必在直线 DF 上.从而 G 为直线 DF 与圆 BCF 的另一个交点.这样的交点也是最多一个.

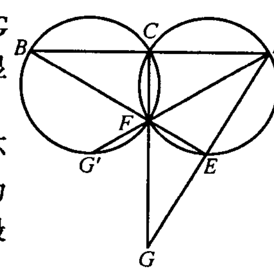


图 12.10

上述关于 G 的推导对于后 4 点的像点 G、H、I、J 完全一样,所以这 4 点都必须是上述两种交点之一,此不可能.这就证明了直线 BC 之外至多有一点,从而知原来的圆 $ABCD$ 上至少有 9 个已知点.

另一方面,因为 10 个已知点中 9 点共圆而第 10 点不在此圆上的情形显然满足题中要求,所以,有鸟最多的一个圆上最少有 9 只鸟.

试题 C1　在平面上任给 5 个点,其中任 3 点不共线,任 4 点不共圆.若一圆过其中 3 点,且另两点分别在该圆内、外,则称为“好圆”.记好圆个数为 n,试求 n 的一切值.

解　在 5 点中任取两点 A、B 并作过 A、B 的直线.若另外三点 C、D、E 在直线 AB 的同侧,则考察 $\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$,不妨设 $\angle ACB < \angle ADB < \angle AEB$.过 A、B、D 三点作一个圆,则 C 在圆外而 E 在圆内,即圆 ABD 为好圆,且过 A、B 两点的好圆只此一个.若 C、D、E 分别在直线 AB 的两侧,不妨设 C、D 在 AB 上方而是 E 在下方,且设 $\angle ACB < \angle ADB$.如果 $\angle AEB + \angle ADB < 180°$,则圆 ACB 是唯一好圆;如果 $\angle AEB + \angle ACB > 180°$,则圆 ADB 是唯一好圆;如果 $\angle AEB + \angle ACB < 180°$,$\angle AEB + \angle ADB > 180°$,则圆 ACB、ADB、AEB 都是好圆.这就是说,过两个固定点的好圆或者一个,或者三个.

由 5 点共可组成 10 个点对,过每个点对至少有一个好圆,故至少有 10 个好圆(包括重复计数).每个好圆恰好 3 个点对,所以至少有 4 个不同的好圆,即 $n \geqslant 4$.

将 5 点中每两点间连一条线段,则每条线段或是一个好圆的弦,或是 3 个好圆的公共弦.如果至少有 5 个好圆,则它们至少有 15 条弦.由于总共只有 10 条线段且每条线段在上述计数中的贡献为 1 或 3,10 个奇数的和为偶数,不可能为 15,故至少有 6 个不同的好圆.这时贡献为 3 的线段至少有 4 条.4 条线段有 8 个端点,故其中必有两条线段有一个公共端点,不妨设为 AB、AC.于是 ABD、ACD 都是好圆,因此过 A、D 的好圆至少两个,当然必有三个.同理,过 A、E 的好圆也有三个.

设 AB、AC、AD、AE 中最短的一条是 AB,于是 $\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$ 都是锐角.若 C、D、E 在直线 AB 同侧,则过 A、B 的好圆只有一个,所以 C、D、E 必分别在直线 AB 的两侧.这时,由于 $\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$ 中任何两角之和都小于 $180°$,所以过 A、B 的好圆不能有三个,矛盾.

综上可知,好圆的数目 n 一定为 4.

试题 C2　在圆心为 O 的单位圆上顺次取 5 点 $A_1,\cdots,A_5$,P 为该圆内一点,记线段 A_iA_{i+2} 与直线 PA_{i+1} 的交点为 Q_i,$i=1,\cdots,5$,其中 $A_6=A_1$,$A_7=A_2$,$OQ_i=d_i$,$i=1,\cdots,5$.试求乘积 $A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5$.

解　如图 12.11,联结 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5、A_5A_1,并作过 Q_1 的直径 MN.于是,由相交弦定理有

$$A_1Q_1\cdot Q_1A_3=MQ_1\cdot Q_1N=1-d_1^2$$

同理 $$A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2}=1-d_i^2, i=2,3,4,5$$

从而有

$$\prod_{i=1}^{5}(A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2})=\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2) \quad ①$$

此外,由于

$$A_iQ_i:Q_iA_{i+2}=S_{\triangle PA_iA_{i+1}}:S_{\triangle PA_{i+1}A_{i+2}}, i=1,2,\cdots,5$$

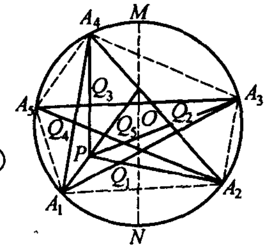


图 12.11

故有

$$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5=Q_1A_3\cdot Q_2A_4\cdot\cdots\cdot Q_5A_2 \quad ②$$

由①和②即得

$$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5=[\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2)^{\frac{1}{2}}]$$

第1节 卜拉美古塔定理的推广及应用

公元7世纪,印度数学家卜拉美古塔(Brahmagupta)提出了:

定理 圆内接四边形的对角线互相垂直,过对角线的交点而垂直于另一边的直线必平分对边.

现将定理作如下推广:①②③

卜拉美古塔定理的推广 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 P,(1)若 O_1 为$\triangle PCD$ 的外心,则 $O_1P\perp AB$;(2)若 $PH\perp AB$,则 PH 过$\triangle PCD$ 的外心.

证明 (1)如图12.12,延长 O_1P 交 AB 于 H,作 $O_1E\perp PC$ 于 E,由于 O_1 为$\triangle PCD$ 的外心,则

$$\angle PO_1C=2\angle PDC$$

但 $$\angle PO_1C=2\angle PO_1E$$

故 $$\angle PDC=\angle PO_1E$$

又由 $$\angle PDC=\angle HAP, \angle O_1PE=\angle APH$$

知 $$\angle AHP=90°$$

① 黄全福.一个古典几何定理的推广[J].中学数学,1993(4):29.
② 朱结根.一个著名定理的推广及应用[J].中学数学教学,1996(4):9.
③ 笞建勋.一道习题的推广与数学竞赛题[J].湖南数学通讯,1994(2):45.

从而 $O_1P\perp AB$.

(2)过 PC 的中点 E 作 PC 的垂线交 PH 于 O_1，由 $PH\perp AB$，不难证

$$\angle BDC=\angle BAC=\angle PO_1E$$

又 O_1E 垂直平分 PC. 则 O_1 为 $\triangle PCD$ 的外心. 即直线 PH 为 $\triangle PCD$ 的外心.

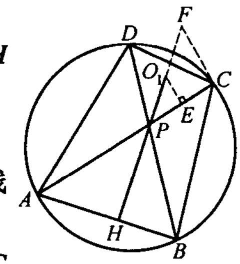


图 12.12

或者过 PC 的中点 E 作 PC 的垂线交 PH 于 O_1，过 C 作 $CF\perp AC$ 交 HP 的延长线于 F，显然 O_1 为 PF 的中点. 由

$$\angle CFP=\angle EO_1P=90^\circ-\angle EPO_1=90^\circ-\angle APH=$$
$$\angle PAH=\angle BDC=\angle CDP$$

知 D、P、C、F 四点共圆. 但 $\angle PCF$ 为直角，即 O_1 为 $\triangle CDP$ 的外心. 故 PH 所在直线过 $\triangle PCD$ 的外心.

例 1　(即前面试题 A)

证明　如图 12.13，由于 AB 是圆 O 与圆 O_1 的公共弦，故 $OO_1\perp AB$，又 O_3 是 $\triangle CDP$ 的外心，由定理的推广有：$O_3P\perp AB$.

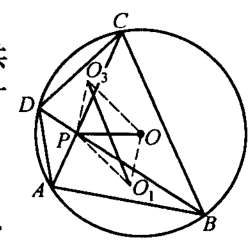


图 12.13

因此 $OO_1/\!/O_3P$. 同理有：$OO_3/\!/O_1P$.

故四边形 OO_1PO_3 是平行四边形，O_1O_3 过 OP 中点. 同理可证：O_2O_4 也过 OP 中点. 即 OP、O_1O_3、O_2O_4 共点.

例 2　作 $\triangle ABC$ 的外接圆，联结 $\overset{\frown}{BC}$ 中点与 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 中点的弦，分别与 AB 边交于 D、与 AC 边交于 E，证明：D、E 与 $\triangle ABC$ 的内心共线.

(1965 年全俄竞赛题)

证明　如图 12.14，设弧中点为 P、Q、R，联结 AP、BQ、CR 交于点 I，则 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，则

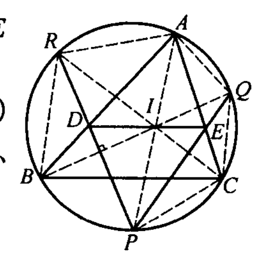


图 12.14

$$\angle QIA=\angle IAB+\angle IBA=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$
$$\angle QAI=\angle QAC+\angle CAP=\angle QBC+\angle CAP=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$

故 $\angle QIA=\angle QAI$，即 $QI=QA$，又 $QA=QC$，因此有 $QI=QA=QC$，即 Q 为 $\triangle IAC$ 的外心.

在四边形 $PCAR$ 中,由定理的推广:$QI\perp PR$,注意到 $RB=RI$,故 PR 垂直平分 BI,因此$\angle DIB=\angle DBI=\angle IBC$,故 $DI/\!/BC$.同理有 $EI/\!/BC$.

故 D、E、I($\triangle ABC$ 的内心)共线.

第2节　对角线互相垂直的圆内接四边形问题

对角线互相垂直的圆内接四边形中,有一系列有趣的问题.①②

命题1　对角线互相垂直的圆内接四边形对边所对的两劣弧度数之和为180°.

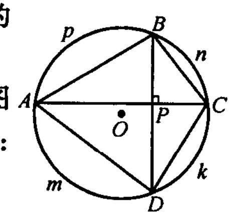


图12.15

证明　由条件 $AC\perp BD$ 知$\triangle PDC$ 是直角三角形,如图12.15所示,因此$\angle PCD+\angle PDC=90°$,由圆周角性质得到:$\overset{\frown}{AmD}+\overset{\frown}{BnC}=180°$.类似地证明$\overset{\frown}{ApB}+\overset{\frown}{DkC}=180°$.

命题2　对角线互相垂直的圆内接四边形一组对边的平方和等于这个四边形外接圆的直径的平方.

证明　过四边形一顶点作外接圆的直径 DM,如图12.16所示,联结 MA、MC,因为

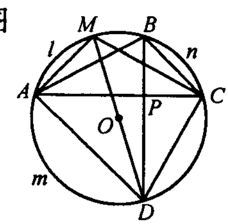


图12.16

$$\overset{\frown}{DmA}+\overset{\frown}{BnC}=180°$$

(可参看命题1),又

$$\overset{\frown}{DmA}+\overset{\frown}{AlM}=180°$$

所以$\overset{\frown}{AlM}=\overset{\frown}{BnC}$,由此得 $AM=BC$.由$\triangle MAD$($\angle MAD=90°$)得

$$AD^2+AM^2=DM^2$$

即
$$AD^2+BC^2=4R^2$$

同理可证
$$DC^2+AB^2=4R^2$$

所以
$$AB^2+DC^2=AD^2+BC^2=4R^2$$

命题3　对角线互相垂直的圆内接四边形的面积等于对边乘积之和的一半.

证明　如图12.16,有

$$S_{ABCD}=S_{AMCD}=S_{\triangle AMD}+S_{\triangle DMC}=\frac{1}{2}(AD\cdot AM+DC\cdot MC)=$$

① 戎松魁.对角线互相垂直的圆内接四边形的性质[J].中学教研(数学),1989(3):39-41.
② 何鼎潮,边学平.神奇的对角线交点[J].中学教研(数学),1991(2):34-36.

$$\frac{1}{2}(AD \cdot BC + DC \cdot AB)$$

利用托勒密定理可以得到同样的结果,即

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$$

因为 $AC \perp BD$,所以 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$,即

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot DC)$$

命题4 (此问题后部分为卜拉美古塔定理)对角线互相垂直的圆内接四边形中,两条对角线将该四边形所分成的直角三角形中,以四边形的一组对边中的一边为斜边的两直角三角形相似,并且其中一个三角形的一条中线的延长线是另一个三角形的高.

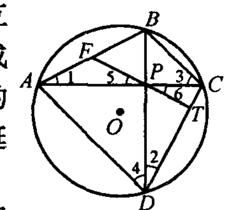


图12.17

证明 由圆周角的性质知$\angle 1 = \angle 2$,$\angle 3 = \angle 4$,如图12.17所示,所以

$$\text{Rt}\triangle APB \backsim \text{Rt}\triangle DPC, \text{Rt}\triangle BPC \backsim \text{Rt}\triangle APD$$

因为直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半,所以$\angle 1 = \angle 5$.此外,$\angle 5 = \angle 6$(对顶角).因为

$$\angle PCD = 90° - \angle 2$$

所以
$$\angle CPT + \angle PCT = \angle 6 + (90° - \angle 2) = 90°$$

此时$\angle PTC = 90°$,即 $PT \perp DC$.

注 在此问题条件下,若其中一个三角形的过点 P 的高线的延长线交另一三角形,则为其中线.

命题5 对角线互相垂直的圆内接四边形的两条中位线(联结对边中点的线段)相等.

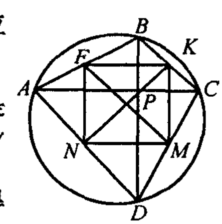


图12.18

证明 设 FM、NK 是四边形的中位线,FK 和 NM 是$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 的中位线如图12.18所示.此时,有 $FK /\!/ AC$,$NM /\!/ AC$,即有 $FK /\!/ MN$.且 $FK = NM = \frac{1}{2} AC$.由此得 $NFKM$ 是平行四边形,因为$\angle KFN = \angle CPD = 90°$,所以四边形 $NFKM$ 是矩形,从而 $FM = NK$.

命题6 在对角线互相垂直的圆内接四边形中,一条中位线的平方等于 $2R^2 - d^2$.这里 R 表示该四边形外接圆半径,d 是外接圆圆心到该四边形对角线交点的距离.

证明 由于平行四边形 $OFPM$ 的各边和对角线之间存在这样的关系如图 12.19 所示.

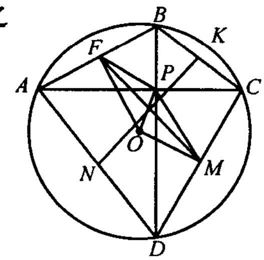


图 12.19

$$FM^2+OP^2=2(FP^2+MP^2)=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}AB)+(\frac{1}{2}CD)^2]$$

$$FM^2+d^2=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)$$

$$FM^2+d^2=\frac{1}{2}\cdot 4R^2$$

(参见命题 2),最后得

$$FM^2=2R^2-d^2$$

推论 四边形对角线的平方和是它中位线平方和的两倍.

命题 7 圆 O 的内接四边形 $ABCD$,对角线 AC、BD 垂直相交于 P,过 P 及 AB 中点 M 的直线交 CD 于 M',相应地有 N、N',G、G',H、H'.试证:M、M'、N、N'、G、G'、H、H' 八点共圆.

(匈牙利数学竞赛题)

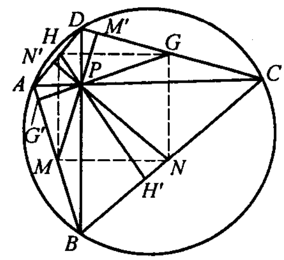


图 12.20

证明 如图 12.20,因 G 是中点,且 $AC\perp DB$.则 $GP=GC$.

$$\angle GPC=\angle GCP,\angle GCP+\angle CDP=90^\circ$$

又由

$$\angle CDP=\angle CAB,\angle GPC=\angle APG'$$

则

$$\angle AG'P=90^\circ$$

即 $GG'\perp AB$ 于 G'.同理有 $MM'\perp DC$ 于 M',故 G'、M、G、M' 四点共圆.

同理得 H'、N、H、N' 四点共圆.

再看 M、N、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 中点,由 $AC\perp DB$ 知,四边形 $MNGH$ 是矩形,则 M、N、G、H 四点共圆.

根据三点确定一个圆知,M、M'、N、N'、G、G'、H、H' 八点共圆.

命题 8 如果对角线互相垂直的圆内接四边形的外接圆圆心为 O,该四边形对角线交点为 P,那么八点圆的圆心 S 在联结 O、P 的线段 OP 的中点上.

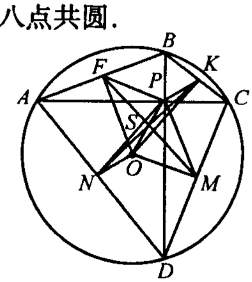


图 12.21

证明 因为 $PF\perp DC$,$OM\perp DC$,所以 $PF/\!/OM$,如图 12.21 所示,同理可证 $OF/\!/PM$,$ON/\!/PK$,$OK/\!/NP$.所以四边形 $OFPM$ 和 $ONPK$ 都是平行四边形.由此可得:它们的对角线 FM、OP、NK 在交点 S 互相平分,因而 S 是线段 OP 的中点.

命题 9　对角线互相垂直的圆内接四边形中，如果将外接圆圆心 O 和这个四边形的一条对角线的两个端点联结起来，那么所得的折线将四边形分成面积相等的两部分.

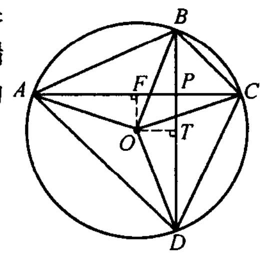


图 12.22

证明　作 $OF\perp AC$，$OT\perp BD$，如图 12.22 所示，有

$$S_{OABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot OF+\frac{1}{2}AC\cdot BP=$$

$$\frac{1}{2}AC\cdot PT+\frac{1}{2}AC\cdot BP=\frac{1}{2}AC(BP+PT)=$$

$$\frac{1}{2}AC\cdot BT=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

本题还可用另外的方法证明.例如

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOB+\frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC$$

因为
$$\angle BOC+\angle AOD=180^\circ$$
$$\angle AOB+\angle COD=180^\circ\text{(参见命题 1)}$$

于是有
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R^2\sin(180^\circ-\angle COD)+\frac{1}{2}R^2\sin(180^\circ-\angle AOD)=$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin\angle COD+\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOD=$$

$$S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}=S_{\triangle ADC}$$

命题 10　设 d 为对角线互相垂直的圆内接四边形的外接圆圆心到该四边形对角线交点的距离，R 是外接圆的半径，那么这个四边形对角线的平方和等于 $4(2R^2-d^2)$.

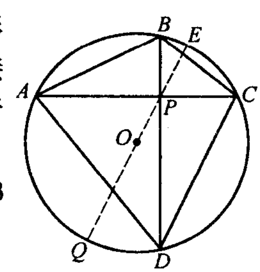


图 12.23

证明　先证 $AP\cdot PC=BP\cdot PD=R^2-d^2$，如图 12.23 所示.经过对角线交点 P 作外接圆的直径 EQ.由条件

$$PO=d,PA\cdot PC=PB\cdot PD=PE\cdot EQ$$
$$PE=R-d,PQ=R+d$$

得
$$PA\cdot PC=PB\cdot PD=R^2-d^2$$

由此即可证得原题结论为

$$AC^2+BD^2=(AP+PC)^2+(BP+PD)^2=AP^2+PC^2+2AP\cdot PC+BP^2+$$

$$PD^2+2BP\cdot PD=(AP^2+PB^2)+(PC^2+PD^2)+4AC\cdot PC=$$

$$AB^2+DC^2+4AP\cdot PC=4R^2+4(R^2-d^2)=4(2R^2-d^2)$$

命题 11 圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中,若对角线 AC、BD 垂直相交于 P,那么 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为定值.

(全俄数学竞赛题)

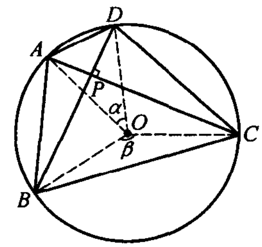


图 12.24

证明 联结 OA、OD、OB、OC,设 $\angle AOD=\alpha$, $\angle BOC=\beta$,圆 O 的半径为 r.

由余弦定理,得

$$AD^2=r^2+r^2-2r^2\cos\alpha, BC^2=r^2+r^2-2r^2\cos\beta$$

而 $$\angle ACD=\frac{1}{2}\alpha,\angle BDC=\frac{1}{2}\beta, AC\perp BD$$

则 $$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=90^\circ,\alpha+\beta=180^\circ$$

即 $$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

故 $$AD^2+BC^2=4r^2$$

由勾股定理,得

$$AD^2=PA^2+PD^2$$
$$BC^2=PB^2+PC^2$$
$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4r^2$$

为定值.

命题 12 圆 O 的内接四边形 $ABCD$,对角线 AC、BD 垂直相交于 P,设圆 O 的半径为 R, $AC^2+BD^2=m\leqslant 8R^2$,试确定 OP 的值.

(加拿大数学竞赛题)

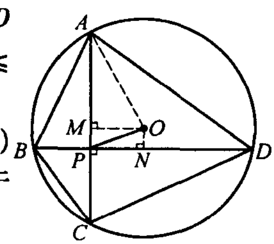


图 12.25

证明 如图 12.25,作 OM、ON 分别垂直 AC、BD 于 M、N,由 $AC\perp BD$,知 $OMPN$ 是矩形.再由垂径定理知

$$AM=MC, BN=ND$$

$$AC^2+BD^2=(2AM)^2+(2DN)^2=4(AM^2+DN^2)=$$
$$4[(R^2-OM^2)+(R^2-ON^2)]=$$
$$8R^2-4(OM^2+ON^2)=8R^2-4OP^2$$

所以 $$4OP^2=8R^2-(AC^2+BD^2)$$

$$OP^2=2R^2-\frac{1}{4}(AC^2+BD^2)$$

所以 $$OP^2=2R^2-\frac{1}{4}m$$

即
$$OP=\frac{1}{4}\sqrt{8R^2-m}\quad ,m\leqslant 8R^2$$

命题13　设对角线互相垂直的圆内接四边形被它的对角线分成的四个直角三角形为$\triangle APB$、$\triangle BPC$、$\triangle CPD$、$\triangle DPA$，那么这四个三角形的外接圆和内切圆的半径的总和等于该四边形对角线的和.

证明　利用直角三角形的性质：对于边长分别为a、b、c的直角三角形，有$R=\frac{1}{2}c$，$r=\frac{a+b-c}{2}$，这里c是直角三角形的斜边长，R、r分别是外接圆和内切圆的半径，如图12.25所示，由此可得

$$r_1+r_2+r_3+r_4+R_1+R_2+R_3+R_4=\frac{1}{2}(AP+PB-AB)+\frac{1}{2}(PB+PC-BC)+$$
$$\frac{1}{2}(PC+PD-CD)+\frac{1}{2}(PD+PA-DA)+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}DA=$$
$$(AP+PC)+(PB+PD)=AC+BD$$

命题14　圆O的内接四边形$ABCD$，其对角线AC、BD垂直相交于P，$\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DOA$的垂心分别为H_1、H_2、H_3、H_4. 证明：P必在H_1、H_2、H_3、H_4所在的直线上.

（波兰数学竞赛题）

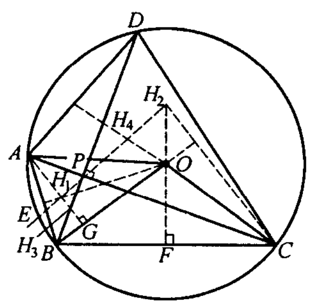


图12.26

证明　设$\triangle OAB$、$\triangle OBC$的高分别是OE、AG、CH_2、OF，如图12.26所示，易知$AG/\!/CH_2$，又

$$AH_1=\frac{AE}{\sin\angle AH_1E}=\frac{AE}{\sin\angle GBE}=\frac{AE}{\sin(90^\circ-\frac{1}{2}\angle AOB)}=$$
$$\frac{AE}{\cos\frac{1}{2}\angle AOB}=\frac{AE}{\cos\angle ACB}$$

$$CH_2=\frac{CF}{\sin\angle CH_2F}=\frac{CF}{\sin(90^\circ-\frac{1}{2}\angle BOC)}=\frac{CF}{\cos\frac{1}{2}\angle BOC}=\frac{CF}{\cos\angle CAB}$$

则
$$AH_1:CH_2=\frac{AE}{\cos\angle ACB}:\frac{CF}{\cos\angle CAB}=\frac{2AE}{\cos\angle ACB}\cdot\frac{\cos\angle CAB}{2CF}=$$
$$\frac{AB\cos\angle CAB}{BC\cos\angle ACB}=AP:PC(AC\perp BD)$$

上面已知$AG/\!/CH_2$. 从而$\angle PAH_1=\angle H_2CP$，联结$H_1P$、$H_2P$. 故$\triangle PAH_1\backsim\triangle PCH_2$，而$APC$是一直线，即$H_1$、$P$、$H_2$在一直线上，同理可得$H_2$、$P$、$H_3$，$H_3$、$P$、$H_4$共线. 故$P$必在$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$所在直线上.

命题 15 对角线互相垂直的圆内接四边形中,对角线交点 P 在四边上的射影组成一新四边形的四顶点,则此新四边形的内切圆圆心为 P.

此命题更一般的形式为:

命题 15′ 圆 O 的内接四边形 $ABCD$,其对角线 AC、BD 相交于 P,点 P 在直线 AB、BC、CD、DA 上的正射影分别是 P_1、P_2、P_3、P_4,证明:P 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的内切圆圆心.

(捷克数学竞赛题)

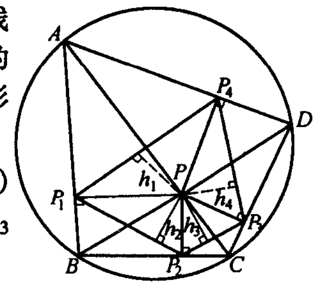


图 12.27

证明 易见 AP_1PP_4、BP_2PP_1、CP_3PP_2、DP_3PP_3 共圆.则

$$\angle P_4AP=\angle P_4P_1P=\angle PP_1P_2=\angle PBP_2$$

得 P_1P 是$\angle P_4P_1P_2$ 的平分线.

设 P 到 P_1P_4、P_1P_2、P_2P_3、P_3P_4 的距离为 h_1、h_2、h_3、h_4.则 $h_1=h_2$,同理有 $h_2=h_3$,$h_3=h_4$.即

$$h_1=h_2=h_3=h_4$$

故 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 内切圆圆心.

第 13 章　1991 ~ 1992 年度试题的诠释

试题 A　设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1.求证:在它的边(包括顶点)或内部可以找出四个点,使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

证法 1　如图 13.1,考虑四个三角形 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的面积,不妨设 $S_{\triangle DAB}$最小,分四种情况讨论.

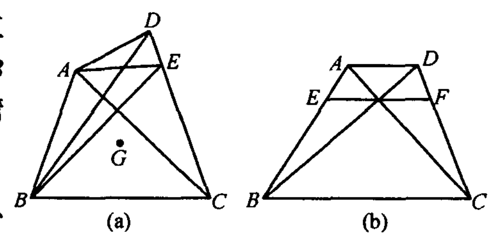


图 13.1

(i) $S_{\triangle DAB}>\frac{1}{4}$.这时,显然 A、B、C、D 即为所求的四个点.

(ii) $S_{\triangle DAB}<\frac{1}{4}$.设 G 为$\triangle BCD$ 的重心.因

$$S_{\triangle BCD}=1-S_{\triangle DAB}>\frac{3}{4}$$

故
$$S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GDB}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}>\frac{1}{4}$$

于是,B、C、D、G 四点即为所求.

(iii) $S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$,而其他三个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.由于

$$S_{\triangle ABC}=1-S_{\triangle CDA}<\frac{3}{4}=S_{\triangle BCD}$$

故过 A 作 BC 的平行线 l 必与线段 CD 相交于 CD 内部的一点 E.由于

$$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle DAB}$$

故
$$S_{\triangle EAB}>S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$$

又
$$S_{\triangle EAC}=S_{\triangle EAB},S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$$

故 E、A、B、C 四点即为所求.

(iv) $S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$,而其他三个三角形中还有一个面积为$\frac{1}{4}$,不妨设 $S_{\triangle CDA}=\frac{1}{4}$,如图 13.1(b)所示.

因 $S_{\triangle DAB}=S_{\triangle CDA}$,故 $AD /\!/ BC$.又

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}=\frac{3}{4}$$

故得

$$BC=3AD$$

在 AB 上取 E,DC 上取 F,使

$$AE=\frac{1}{4}AB,\ DF=\frac{1}{4}CD$$

那么

$$EF=\frac{1}{4}(3AD+BC)=\frac{3}{2}AD$$

$$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ECF}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABF}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}>S_{\triangle EBF}=\frac{1}{4}$$

故 E、B、C、F 四点即为所求.

证法 2 如果 $ABCD$ 是平行四边形,那么

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDA}=S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}$$

因此,A、B、C、D 四点即为所求.

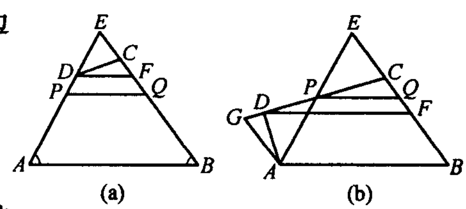


图 13.2

如果 $ABCD$ 不是平行四边形,不妨设 AD 与 BC 不平行,且 $\angle DAB+\angle CBA<\pi$.又设 D 到 AB 的距离不超过 C 到 AB 的距离.过 D 作 AB 的平行线交线段 BC 于 F.分两种情况讨论.

(i) $DF\leqslant\frac{1}{2}AB$.如图 13.2(a)所示.此时可在线段 AD 与 BC 上分别取 P、Q 使得

$$PQ /\!/ AB \quad 且 \quad PQ=\frac{1}{2}AB \qquad (*)$$

则可证 A、B、P、Q 即为所求.

其实,设直线 AD、BC 相交于 E,则

$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABQ}>S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABE}>\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{4}\qquad (**)$$

(ii) $DF>\frac{1}{2}AB$. 如图 13.2(b)所示.

此时可在线段 DC 与 FC 上分别取 P、Q，使式(*)成立(当 $CD/\!/AB$ 时，$Q=F=C$).

现证 A、B、P、Q 即为所求.

设 AP 与 BC 的延长线交于 E. 由式(*)，知 P 为 AE 的中点.

过 A 作 BC 的平行线 l，由于 $\angle DAB+\angle CBA<\pi$，$l$ 必与 CD 的延长线相交，设交点为 G，则

$$S_{\triangle PCE}=S_{\triangle PGA}>S_{\triangle PDA}$$

从而
$$S_{\triangle EAB}=S_{\triangle PCE}+S_{PABC}>S_{\triangle PDA}+S_{PABC}=S_{ABCD}$$

同样可证式(**)成立.

证法 3　在凸四边形 $ABCD$ 中，不妨假定 $\angle A+\angle B\leqslant\pi$，$\angle B+\angle C\leqslant\pi$，则 $\triangle ADC$ 是 A、B、C、D 四点所成的四个三角形中面积最小者，所以 $S_{\triangle ADC}\leqslant\frac{1}{2}$. 过 D 作 $DE/\!/AC$ 交 BC 延长线于 E(也可交 BA 延长线)，联结 AE 交 DC 于 O，如图 13.3 所示，则由等积原理(等底等高的两个三角形面积相等)知

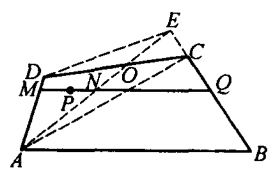


图 13.3

$$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle AEC}$$

则
$$S_{\triangle EAB}=S_{ABCD}=1$$

又 $DE\leqslant AC$，则 $EO\leqslant OA$，由

$$S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ADC}\leqslant\frac{1}{2}$$

有
$$EC\leqslant BC$$

取 EA 的中点 N，EB 的中点 Q，则 N、Q 分别在线段 AO、BC 上，联结 QN 交 AD 于 M，则

$$S_{\triangle ANQ}=\frac{1}{4}S_{\triangle EAB}=\frac{1}{4}$$

在线段 MN 上取一点 P(N 点除外)则 $PQ>NQ$，则

$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPQ}>S_{\triangle ANQ}=\frac{1}{4}$$

又 $$AB > MQ > PQ$$

则 $$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle QAB} > S_{\triangle APQ} > \frac{1}{4}$$

即 A、B、Q、P 四点即为所要找出的符合要求的四点.证毕.

注 (1)特别地,当$\angle DAB + \angle CBA = \pi$,$\angle ABC + \angle DCB = \pi$时,就是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的情形,如 13.4(a)所示,这时上面证明过程中所有含等号的不等式只取等号,Q、N、M 分别与 C、O、D 重合,P 在线段 OD 上(点 O 除外).

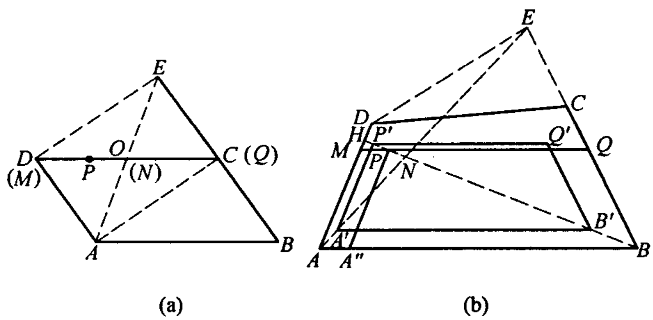


图 13.4

(2)下面我们把题目条件中"在边上(包括顶点)"这一条件去掉,将题目加强.

在图 13.3 中,设 P 为 MN 的中点,过 P 作 $PA'' /\!/ AM$ 交 AB 于 A'',则

$$S_{ABQN} = S_{A''BQP} = \frac{3}{4}$$

如图 13.4(b)所示.联结 BP 交线段 AD 或 DC 于 H,在 PH 上取一点 P'(H、P 除外),P' 作 $P'Q' \mathrel{\underline{/\!/}} PQ$,$P'A' \mathrel{\underline{/\!/}} PA''$,过 Q' 作 $Q'B' \mathrel{\underline{/\!/}} QB$,联结 $A'B'$,则

$$\text{梯形 } A''BQP \cong \text{梯形 } A'B'Q'P'$$

由于 A''、B、Q、P 四点和 A'、B'、Q'、P' 四点也是合要求的四点,但 A'、B'、Q'、P' 在四边形 $ABCD$ 内部.于是题目可加强为:

推论 1 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1,则在它的内部存在四点,使得以其中任三点为顶点所成的四个三角形面积均大于$\frac{1}{4}$.

从推论 1 的证明中还可得到:

推论 2 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1,则在它的内部可截割出一个面积为$\frac{3}{4}$,且上、下底之比为大于$\frac{1}{2}$而小于 1 的梯形.

试题 B　凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P．$\triangle ABP$、$\triangle CDP$ 的外接圆相交于 P 和另一点 Q，且 O、P、Q 三点两两不重合．试证：$\angle OQP=90°$．

证法 1　如图 13.5，联结 AO、AQ、DO、DQ，易知

$$\angle DQA=\angle DQP+\angle PQA=\angle DCP+\angle ABP=2\angle ABD$$

$$\angle AOD=2\angle ABD$$

于是

$$\angle DQA=\angle AOD$$

从而，A、O、Q、D 四点共圆．又

$$\angle AQO=\angle ADO=90°-\frac{1}{2}\angle AOD=90°-\angle ABD$$

$$\angle AQP=\angle ABD$$

所以

$$\angle OQP=\angle AQO+\angle AQP=90°$$

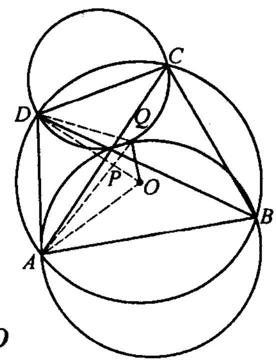


图 13.5

证法 2　如图 13.6，O_1、O_2 分别是 $\triangle ABP$ 和 $\triangle PCD$ 的外心．联结 O_2P 并延长交 AB 于 H．联结 O_2D．于是

$$\angle BPH=\angle O_2PD=90°-\frac{1}{2}\angle DO_2P=$$

$$90°-\angle DCP=90°-\angle ABD$$

从而，$\angle PHB=90°$，即 $O_2P\perp AB$．又 $OO_1\perp AB$，故 $OO_1/\!/O_2P$．

同理 $O_2O/\!/O_1P$．因而，O_1OO_2P 是平行四边形，E 是 OP 的中点．

又 F 是 PQ 的中点，故 $EF/\!/OQ$，即 $O_1O_2/\!/OQ$．但 $O_2O_1\perp PQ$，故 $OQ\perp PQ$，即 $\angle OQP=90°$．

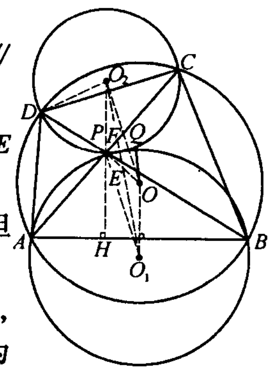


图 13.6

试题 C　平面上给定 $\triangle ABC$，$AB=\sqrt{7}$，$BC=\sqrt{13}$，$CA=\sqrt{19}$．分别以 A、B、C 为圆心作圆，且半径依次为 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1．试证：在这三个圆上各存在一点 A'、B'、C'，使 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．

证明　分别将以点 A、B、C 为圆心的圆叫做圆 A、圆 B、圆 C，它们的半径记作 r_A、r_B、r_C．由三圆圆心之间的距离及半径之值看出，这三个圆互不相交，且有 $r_A:r_B:r_C=1:2:3$．下面证明，在平面上存在一点 M，使得

$$MA:MB:MC=1:2:3 \qquad ①$$

首先证明一个基本事实:如果 D_1 和 D_2 分别是线段 EF 的内、外定比分点,如图 13.7 所示,即使得

$$\frac{D_1E}{D_1F}=\frac{D_2E}{D_2F}=\lambda\neq 1$$

那么,对于以 D_1D_2 为直径的圆周上任意一点 M,都有 $\frac{ME}{MF}=\lambda$.

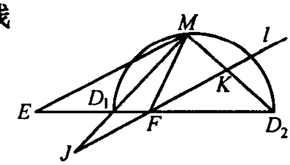


图 13.7

设 M 是以 D_1D_2 为直径的圆周上任意一点.过点 F 作直线 $l /\!/ EM$.设 l 与直线 MD_1、MD_2 的交点分别为 J、K.于是,有

$$\triangle D_1ME \backsim \triangle D_1JF$$

从而

$$\frac{JF}{EM}=\frac{D_1F}{D_1E}=\frac{1}{\lambda}$$

还有

$$\triangle D_2FK \backsim \triangle D_2EM$$

故

$$\frac{FK}{EM}=\frac{D_2F}{D_2E}=\frac{1}{\lambda}$$

因此,$JF=FK$,故在 $\mathrm{Rt}\triangle MJK$ 中,MF 是斜边上的中线,故有 $MF=JF=FK$,更有

$$\frac{MF}{ME}=\frac{D_1F}{D_1E}=\frac{1}{\lambda}$$

现在证满足式①的点 M 存在.

分别对线段 AB、AC 按比例$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$作出具有上述性质的圆,易知点 A 在此二圆的内部,因此,这两个圆必定相交,设 M 为交点之一.于是,由所证的基本事实知有

$$MA:MB:MC=1:2:3$$

以点 M 为中心,令$\triangle ABC$ 绕 M 旋转,当点 A 到达圆周 A 上时即停止,将此时点 A 的位置记作 A'.由于

$$MA:MB:MC=1:2:3=r_A:r_B:r_C$$

所以,当点 A 到达圆周 A 上时,点 B、点 C 亦分别到达圆周 B、圆周 C 上,将点 B,点 C 此时的位置分别记作 B'、C',于是就有$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$,故 A'、B'、C' 的存在性获证.

第 1 节　嵌入三角形的平行四边形问题

我们在第 6 章第 1 节三角形的与其边平行的内接平行四边形问题中,给出

了“其内接平行四边形的面积不大于三角形面积的一半”的结论.由此,我们有

命题 1 嵌入三角形的平行四边形面积不超过该三角形面积的一半.

对偶地,我们也有:

命题 2 嵌入平行四边形的三角形面积不超过该平行四边形面积的一半.

这是两个非常活跃的组合几何问题,利用这两个命题,可以证明 1991 年全国高中联赛试题的加强命题:

设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1,求证:在它的边上(包括顶点)或内部可以找出四个点,使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均不小于 $\frac{4}{15}$.

现在证明如下:①

如图 13.8,作面积为 1 的梯形 $ABCD$,可得

$$S_1 = S_{\triangle ABD} = \frac{1}{5}, S_2 = S_{\triangle BCD} = \frac{4}{5}$$

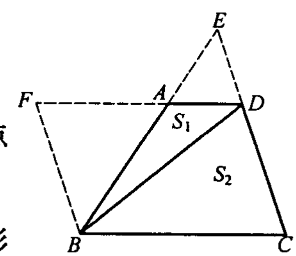


图 13.8

以下只须证明:在这个梯形区域不存在使其中每三点组成的三角形面积都大于 $\frac{4}{15}$ 的四点.

(1)若四点所成的凸包为四边形,设这个四边形为 $MNPQ$,如图 13.9 所示,不妨设

$$S_{\triangle MNQ} = \min\{S_{\triangle MNQ}, S_{\triangle MNP}, S_{\triangle NPQ}, S_{\triangle PQM}\}$$

由 $S_{\triangle MNQ} \leqslant S_{\triangle MNP} \Rightarrow \angle MNQ \leqslant \angle NQP$

故可在 $\angle NQP$ 内作

$$\angle OPN = \angle MNQ$$

又由 $S_{\triangle MNQ} \leqslant S_{\triangle MPQ} \Rightarrow \angle MQN \leqslant \angle QNP$

故可在 $\angle QNP$ 内作 $\angle ONQ = \angle NQM$,从而 $\square MNOQ \subset$ 四边形 $MNPQ$.

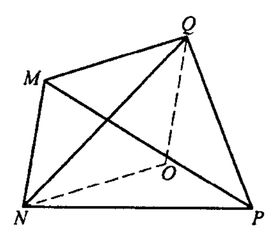


图 13.9

在图 13.8 中,延长 BA、CD 相交于 E,由条件,有

$$\frac{S_2}{S_{\triangle EBC}} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE - DE}{CE} = 1 - \frac{DE}{CE} = 1 - \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle EBC} = \frac{16}{15}$$

因为有 $\square MNOQ \subset$ 四边形 $MNPQ \subset$ 梯形 $ABCD \subset \triangle EBC$,故由命题 1,有

$$S_{\square MNOQ} \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{15} = \frac{8}{15} \Rightarrow S_{\triangle MNQ} \leqslant \frac{4}{15}$$

① 张学文,杨林.从一道竞赛题的加强谈起[J].湖南数学通讯,1992(6):26-27.

(2)若四点所成的凸包为三角形,设这个三角形为$\triangle XYZ$,第四点P在$\triangle XYZ$区域,则易知$\triangle PXY$、$\triangle PYZ$、$\triangle PZX$中至少有一个的面积不大于$\frac{1}{3}S_{\triangle XYZ}$,不妨设$S_{\triangle PXY}\leqslant\frac{1}{3}S_{\triangle XYZ}$,在图13.8中过$B$作$CD$的平行线与$DA$的延长线相交于$F$,由条件,有

$$\frac{S_{\triangle AFB}}{S_1}=\frac{AF}{AD}=\frac{BC-AD}{AD}=\frac{BC}{AD}-1=\frac{S_2}{S_1}-1=3\Rightarrow$$

$$S_{\triangle AFB}=\frac{3}{5}\Rightarrow S_{\square FBCD}=\frac{8}{5}$$

故由命题2,有

$$S_{\triangle PXY}\leqslant\frac{1}{3}S_{\triangle XYZ}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\square FBCD}=\frac{4}{15}$$

(3)若四点中有至少三点在同一直线上,这种情形的证明是显而易见的.

至此,我们证明了$\frac{4}{15}$的最佳性.

在这个证明中,我们看到了梯形这个"联络员"所发挥的重要作用,同时,我们也注意到,这个问题的实质是研究四点中的那个最小三角形(面积)所具有的性质和它与其他相关图形的联系,这使我们注意到三角形的内接三角形中的一个命题(第10章第2节):

命题3 设H是$\triangle ABC$内的任一点,AH、BH、CH的延长线交$\triangle ABC$三边于D、E、F,则成立$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,等号当且仅当$H$与$\triangle ABC$的重心$G$重合时成立.

如果将命题1中的平行四边形按对角线剖分为两个全等的三角形,则每一个三角形的面积小于等于$\frac{1}{4}$覆盖三角形的面积,将它们进行对照,可以看到,无论是所涉及的对象还是结论都有某种程度的一致性,这使我们想到,命题1与命题3可能有着某种内在的联系,或者能将它们在某个更一般的较高层次的问题中统一起来,研究结果表明,这两个命题是等价的,对此,我们有:

命题4 设H是$\triangle ABC$内的任一点,AH、BH、CH的延长线交$\triangle ABC$三边于D、E、F,则在$\triangle ABC$内存在一个以$\triangle DEF$的某两边为邻边的平行四边形.

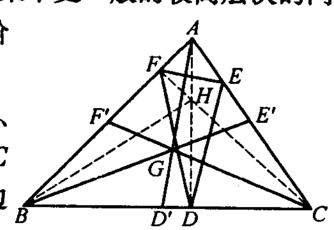


图13.10

证明 如图13.10,G是$\triangle ABC$的重心,D'、

E'、F'分别为$\triangle ABC$各边上的中点,则$\triangle ABC$被划分为六个区域:$\triangle AF'G$、$\triangle F'BG$、$\triangle BD'G$、$\triangle D'CG$、$\triangle E'CG$、$\triangle E'AG$.点H落在其中之一(包括边界上).不妨设H落在$\triangle E'AG$区域,根据图13.10,易知必有

$$\frac{CD}{BD}\leqslant 1,\frac{CE}{AE}\leqslant 1,\frac{AF}{FB}\leqslant 1$$

由塞瓦定理,得

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\Rightarrow\frac{DC}{BD}=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\leqslant\frac{CE}{EA}$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{EC}\leqslant\frac{AE}{EC}\Rightarrow\angle BFD\geqslant\angle FDE、\angle BDF\geqslant\angle DFE$$

分别过F、D在$\angle BFD$、$\angle BDF$内作DE、FE的平行线,则两平行线的交点P必落在$\triangle BFD$区域,从而,有

$$\triangle FDE\subset\square FPDE\subset\triangle ABC$$

故由命题1知

$$S_{\triangle EFD}=\frac{1}{2}S_{\square FPDE}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\right)=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

等号当且仅当
$$\frac{CD}{BD}=1,\frac{CE}{AE}=1,\frac{AF}{FB}=1$$
中任两个成立即H与G重合时成立.故证.

第2节 关于三角形外心的几个充要条件

定理1 三角形所在平面内的一点是其外心的充要条件为:该点到三顶点的距离相等.

显然,若点O为$\triangle ABC$的外心,则

(1)$\angle BOC=2\angle A,\angle AOC=2\angle B,\angle AOB=2\angle C$;

(2)$OB=OC$,且$\angle BOC=2\angle A$.

下面,我们证明上述命题的逆命题也是成立的.①

引理1 设点O和C在直线AB同侧.$OA=OB$且$\angle AOB=2\angle ACB$,则O为$\triangle ABC$的外心.

引理2 设点O和C分居直线AB两侧,$OA=OB$且$\angle AOB=2(180^\circ-\angle ACB)$,则$O$为$\triangle ABC$的外心.

① 方廷刚.怎样判别三角形的外心[J].中学数学,1995(3):41-48.

引理1的证明　如图13.11，延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆(存在且唯一)于点 D，联结 BD，则

$$\angle ADB=\angle ACB$$

由
$$\angle AOB=2\angle ACB$$
知
$$\angle AOB=2\angle ADB$$
故可得
$$\angle ADB=\angle OBD$$
则
$$OD=OB=OA$$

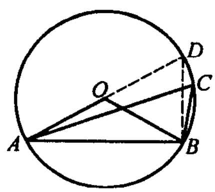


图13.11

故 O 为 $\triangle ABD$ 之外心．又 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆，故 O 为 $\triangle ABC$ 之外心．

相仿地可证明引理2，引入有向角概念，如规定 $\overset{\frown}{AOB}$ 表示射线 OA 沿反时针方向旋转到 OB 所成的角，则可将上述两定理以及熟知的直角三角形斜边中点是其外心综合为：

引理3　设 O 与 $\triangle ABC$ 在同一平面上，$OA=OB$ 且 $\overset{\frown}{AOB}=2\ \overset{\frown}{ACB}=2\angle ACB$，则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心．

综上，我们有：

定理2　设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心的充要条件是下述条件之一成立．

(1) $\angle BOC=2\angle A$，$\angle AOC=2\angle B$，$\angle AOB=2\angle C$．

(2) $OB=OC$，且 $\angle BOC=2\angle A$．

例1　如图13.12，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是底边 BC 上一点，E 是线段 AD 上一点，且 $\angle BED=2\angle CED=\angle A$，求证：$BD=2CD$．

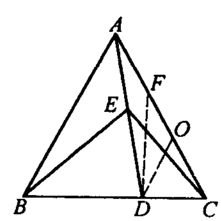


图13.12

(1992年全国初中数学联赛)

证明　作 $DO/\!/AB$ 交 AC 于 O．则由 $AB=AC$ 易知 $OD=OC$．且

$$\angle DOC=\angle A=2\angle DEC$$

故 O 为 $\triangle EDC$ 的外心，取 F 为 $\triangle EDC$ 的外接圆与 AC 之交点，则

$$OF=OC=OD$$

且
$$\angle ACE=\angle ADF$$
则
$$\triangle ACE\backsim\triangle ADF$$
即
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AF}{AE}$$

再由 $DO/\!/AB$ 有

$$\angle ADO=\angle BAE,\angle DOC=\angle A=\angle BED$$

则
$$\angle AOD=\angle BEA$$

有
$$\triangle ADO\backsim\triangle BAE$$

即
$$\frac{OD}{AE}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{AF}{AE}$$

从而
$$AF=OD=OC=OF$$

故
$$\frac{AO}{OC}=\frac{2}{1}$$

再由 $OD/\!/AB$ 知$\frac{BD}{DC}=\frac{AO}{OC}$,于是 $BD=2CD$.

例2 如图13.13,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=20°$,点D在AC上,E在AB上,$\angle ACE=\angle BDE=30°$,求$\angle ABD$的度数.

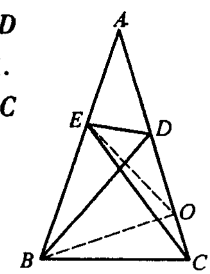


图13.13

解 作$\angle CBO=20°$,BO交AC于O,联结OE,则$AB=AC$且$\angle A=20°$,则

$$\angle ABC=\angle ACB=80°$$

即
$$\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle BCO=80°$$

故
$$\angle BOC=\angle BCO,BO=BC$$

又$\angle ACE=30°$,则$\angle BCE=50°$,即

$$\angle BEC=180°-\angle EBC-\angle BCE=50°$$

即
$$\angle BEC=\angle BCE$$

从而
$$BE=BC=BO$$

且
$$\angle EBO=60°$$

则$\triangle OBE$为正三角形,即$OB=OE$,且

$$\angle BOE=60°=2\angle BDE$$

故O为$\triangle BDE$的外心,又

$$\angle DOE=180°-\angle EOB-\angle BOC=40°$$

故
$$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle EOD=20°$$

例3 在正方形$ABCD$的边BC、CD上各取一点E、F,满足$\angle EAF=45°$,作$EH\perp AF$,H为垂足.求证:$\angle CHF=2\angle BAE$.

证明 如图13.14,联结AC、BH,由$\angle ABE+\angle AHE=180°$,知$A$、$B$、$E$、$H$四点共圆,则

$$\angle EBH=\angle EAH=45°$$

即
$$\angle CBH=45°=\angle ABH$$

从而可证 $\triangle CBH \cong \triangle ABH$

故 $HC = HA$

又$\triangle AHE$为等腰直角三角形,$HA = HE$,则 $HA = HE = HC$,点 H 为$\triangle AEC$之外心.此时

$$\angle EHC = 2\angle EAC$$

但 $\angle EHF = 90^\circ = 2\times 45^\circ = 2\angle BAC$

故 $\angle CHF = \angle EHF - \angle EHC = 2\angle BAC - 2\angle EAC = 2(\angle BAC - \angle EAC) = 2\angle BAE$

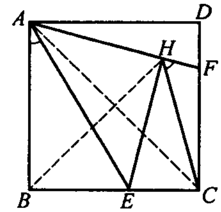


图 13.14

例4 AB 为半圆 O 的直径,两弦 AF、BE 相交于 Q,过 E、F 分别作半圆的切线得交点 P.求证:$PQ\perp AB$.

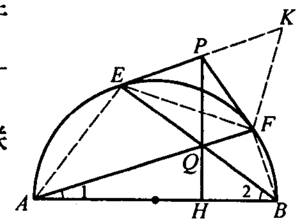


图 13.15

证明 如图 13.15,延长 EP 到 K,使 $PK = PE$,联结 KF、AE、EF、BF.直线 PQ 交 AB 于 H.因

$$\angle EQF = \angle AQB = (90^\circ - \angle 1) + (90^\circ - \angle 2) = \angle ABF + \angle BAE = \angle AFP + \angle BEP = \angle QFP + \angle QEP$$

又由 $PK = PE = PF \Rightarrow \angle K = \angle PFK$

则 $\angle EQF + \angle K = (\angle QFP + \angle QEP) + \angle PFK = \angle QFK + \angle QEK$

由于凸四边形内角和为 360°,则

$$\angle EQF + \angle K = \frac{1}{2}\times 360^\circ = 180^\circ$$

知 E、Q、F、K 四点共圆.又

$$PK = PE = PF$$

则点 P 必是$\triangle EFK$之外心,即点 P 是 E、Q、F、K 四点共圆的圆心,显然 $PQ = PE = PF$.于是

$$\angle 1 + \angle AQH = \angle 1 + \angle PQF = \angle 1 + PFQ = \angle 1 + \angle AFP = \angle 1 + \angle ABF = 90^\circ$$

由此可知 $QH\perp AH$,即 $PQ\perp AB$.

第 14 章　1992 ~ 1993 年度试题的诠释

试题 A　设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置.

证法 1　(i) 如图 14.1，过 A_3 作圆 O 的直径 A_3B. 联结 BA_1、BA_2、BA_4、H_1A_2、H_1A_4、H_2A_1、H_2A_4. 因 A_2H_1、BA_4 同垂直于 A_3A_4，故 $A_2H_1 \parallel BA_4$. 因 A_4H_1、BA_2 同垂直于 A_2A_3，故 $A_4H_1 \parallel BA_2$. 因此，四边形 $H_1A_4BA_2$ 为平行四边形，从而 $A_2H_1 \perp\!\!\!\!\parallel BA_4$.

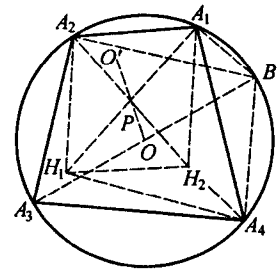


图 14.1

同理，可得四边形 $H_2A_4BA_1$ 为平行四边形.

因此，$A_1H_2 \perp\!\!\!\!\parallel BA_4$，从而 $A_2H_1 \perp\!\!\!\!\parallel A_1H_2$. 联结 H_1、H_2.

因此，四边形 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形.

(ii) 联结 A_1H_1、A_2H_2. 由平行四边形的性质，知对角线 A_1H_1 与 A_2H_2 互相平分. 设它们的交点为 P，则 $A_1P = PH_1$，$A_2P = PH_2$.

同理可得 A_2H_2 与 A_3H_3 互相平分，则交点为 A_2H_2 的中点，故为点 P. 同理，A_3H_3 与 A_4H_4 互相平分于点 P，即 $A_3P = PH_3$，$A_4P = PH_4$，于是 A_i 和 H_i $(i = 1,2,3,4)$ 关于点 P 是中心对称的.

(iii) 因 A_1、A_2、A_3、A_4 共圆，故 H_1、H_2、H_3、H_4 这四点也共圆，其圆心是点 O 关于点 P 的中心对称点.

联结 OP，并延长 OP 到 O' 使 $PO' = OP$，则点 O' 是 H_1、H_2、H_3、H_4 四点所决定的圆的圆心.

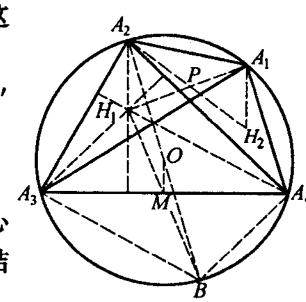


图 14.2

证法 2　如图 14.2，过 $\triangle A_2A_3A_4$ 的外接圆的圆心 O 作 A_3A_4 的垂线 OM，垂足为 M，作直径 A_2B，联结 BA_3、BA_4、H_1A_2、H_1A_3、H_1A_4、BH_1.

因 BA_3 和 A_4H_1 同垂直于 A_2A_3，故 $BA_3 \parallel A_4H_1$.

同理 $BA_4 // A_3H_1$，故四边形 $BA_4H_1A_3$ 为平行四边形. 由于 M 是 A_3A_4 的中点. 故 B、M、H_1 共线. OM 为 $\triangle BA_2H_1$ 的中位线，因此，$A_2H_1 \perp\!\!\!\!= 2OM$.

同理，在 $\triangle A_1A_3A_4$ 中，有 $A_1H_2 \perp\!\!\!\!= 2OM$，因此，有 $A_2H_1 \perp\!\!\!\!= A_1H_2$，四边形 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形.

联结 A_1H_1、A_2H_2，由平行四边形的性质知 A_1H_1 与 A_2H_2 互相平分，设交点为 P. 同理，A_2H_2 与 A_3H_3 互相平分于点 P，A_3H_3 与 A_4H_4 互相平分于点 P.

(以下同证法 1 的(iii))

证法 3　如图 14.1，设圆 O 的半径是 R，并设点 P 是线段 A_1H_1 的中点. 联结 OP 并延长到 O'，使 $O'P = OP$.

易知，四边形 $OA_1O'H_1$ 是平行四边形. 故 $O'H_1 = OA_1 = R$.

过 A_3 作圆 O 的直径 A_3B，联结 BA_4，则 A_2H_1、BA_4 同垂直于 A_3A_4，故 $A_2H_1 // BA_4$. 因 A_4H_1、BA_2 同垂直于 A_2A_3，故 $A_4H_1 // BA_2$，因此，四边形 $H_1A_4BA_2$ 为平行四边形，从而 $A_2H_1 \perp\!\!\!\!= BA_4$.

390 同理可证，$A_1H_2 \perp\!\!\!\!= BA_4$，所以 $A_2H_1 \perp\!\!\!\!= A_1H_2$，$P$ 也是 A_2H_2 的中点，从而 $O'H_2 = OA_2 = R$.

类似地，可证 $O'H_3 = OA_3 = R$，$O'H_4 = OA_4 = R$，所以 $O'H_1 = O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$. 即 H_1、H_2、H_3，H_4 在以 O' 为圆心，R 为半径的圆上.

证法 4　利用圆内接三角形的一个性质："若 O、H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，$OM \perp BC$ 于 M，则 $AH = 2OM$."

可作以下证明.

如图 14.3，作 $OM \perp A_3A_4$ 于点 M，联结 A_1H_2、A_2H_1、H_1H_2. 则

$$A_1H_2 = 2OM, A_2H_1 = 2OM$$

又因为 $A_1H_2 \perp A_3A_4 \perp A_2H_1$，所以 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形.

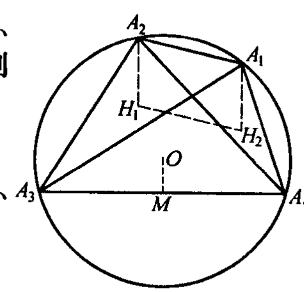


图 14.3

所以 $H_1H_2 \perp\!\!\!\!= A_2A_1$，同理 $H_2H_3 \perp\!\!\!\!= A_3A_2$，$H_3H_4 \perp\!\!\!\!= A_4A_3$，$H_4H_1 \perp\!\!\!\!= A_1A_4$. 则四边形 $H_1H_2H_3H_4 \cong$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$.

故 H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，圆心由 $\triangle H_1H_2H_3$ 便可定出.

证法 5　如图 14.4,作 O 关于 A_1A_3、A_2A_4 的对称点 O_1、O_2,作 $\square OO_2O'O_1$,联结 A_2H_1、A_3H_1、$O'H_1$.知

$$A_3H_1 \mathrel{\underline{\parallel}} OO_2 \mathrel{\underline{\parallel}} O_1O'$$

所以　$$O'H_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_1A_3 = OA_3 \text{(对称性)}$$

所以 $O'H_1 = R$.同理 $O'H_2 = R$, $O'H_3 = R$, $O'H_4 = R$.

故 H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆,且 O' 为圆心.

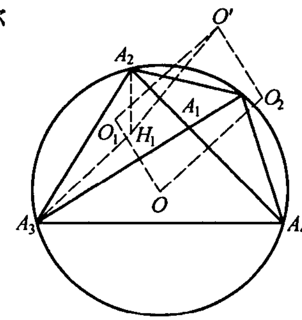


图 14.4

证法 6　(由山东青岛二中邹明给出)如图 14.5,作圆 O 的直径 A_2B,联结 A_3B、A_4B、A_2H_1、A_3H_1、A_4H_1.

由 $A_3H_1 \perp A_2A_4$, $BA_4 \perp A_2A_4$ 得

$$A_3H_1 \parallel BA_4$$

同理　$$A_4H_1 \parallel BA_3$$

因此,四边形 $A_3BA_4H_1$ 为平行四边形.

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3H_1} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{BA_4} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$$

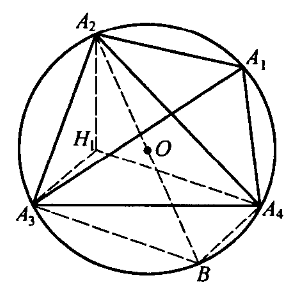


图 14.5

设圆 O 的半径为 R,作向量

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$$

则　$$\overrightarrow{H_1C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_1}$$

$$|\overrightarrow{H_1C}| = |\overrightarrow{OA_1}| = R$$

同理　$$|\overrightarrow{H_2C}| = |\overrightarrow{OA_2}| = R$$

$$|\overrightarrow{H_3C}| = |\overrightarrow{OA_3}| = R$$

$$|\overrightarrow{H_4C}| = |\overrightarrow{OA_4}| = R$$

因此,H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆,该圆的圆心 C 由 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$ 确定.

证法 7　(由张家港市吴宇栋给出)如图 14.6,以圆心 O 为原点,任取互相垂直的两线为 x 轴、y 轴,建立直角坐标系.设圆 O 为单位圆.

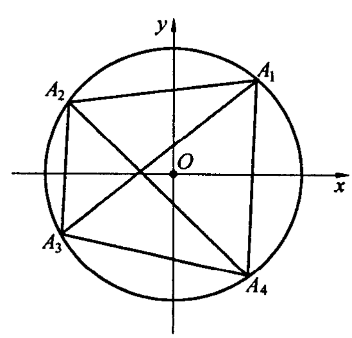


图 14.6

设 $A_1(\cos\ \theta_1,\sin\ \theta_1)$,$A_2(\cos\ \theta_2,\sin\ \theta_2)$,$A_3(\cos\ \theta_3,\sin\ \theta_3)$,$A_4(\cos\ \theta_4,\sin\ \theta_4)$.则直线 A_3A_4 为

$$\frac{y-\sin\theta_4}{x-\cos\theta_4}=\frac{\sin\theta_3-\sin\theta_4}{\cos\theta_3-\cos\theta_4}$$

即
$$\cos\frac{(\theta_3+\theta_4)}{2}\cdot x+\sin\frac{(\theta_3+\theta_4)}{2}\cdot y=\cos\frac{(\theta_3-\theta_4)}{2}$$

则直线 A_2H_1 为

$$\frac{y-\sin\theta_2}{x-\cos\theta_2}=\tan\frac{(\theta_3-\theta_4)}{2}$$

即

$$\sin\frac{(\theta_3+\theta_4)}{2}\cdot x-\cos\frac{(\theta_3+\theta_4)}{2}\cdot y+\sin\frac{(2\theta_2-\theta_3-\theta_4)}{2}=0 \quad ①$$

由对称性知直线 A_3H_1 为

$$\sin\frac{(\theta_2+\theta_4)}{2}\cdot x-\cos\frac{(\theta_2+\theta_4)}{2}\cdot y+\sin\frac{(2\theta_3-\theta_2-\theta_4)}{2}=0 \quad ②$$

由①、②可解出 $H_1(\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4,\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$.

由对称性可得

$$H_2(\cos\theta_1+\cos\theta_3+\cos\theta_4,\sin\theta_1+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$$
$$H_3(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_4,\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_4)$$
$$H_4(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3,\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3)$$

记 O' 为$(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4,\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$,则 $|O'H_1|=|O'H_2|=|O'H_3|=|O'H_4|=1$,故 H_1、H_2、H_3、H_4 在以 O' 为圆心,1 为半径的圆上.

证法 8 (由安徽庐江中学夏则勇给出)以圆心 O 为原点,建立直角坐标系,设圆 O 的半径为 a,参见图 14.6.设点 $A_1(a\cos\alpha_1,a\sin\alpha_1)$、$A_2(a\cos\alpha_2,a\sin\alpha_2)$、$A_3(a\cos\alpha_3,a\sin\alpha_3)$、$A_4(a\cos\alpha_4,a\sin\alpha_4)$,先求出 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心 H_4 的坐标.

显然,$\triangle A_1A_2A_3$ 的外心为原点,重心为 $G_4\left(\frac{a(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3)}{3},\frac{a(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)}{3}\right)$,设 H_4 坐标为(x_4,y_4),由平几知识,外心 O、重心 G、垂心 H 在一直线(欧拉线)上,且 $|OG|:|GH|=\frac{1}{2}$.设 H_4 分 OG_4 所成比

为 λ，H_4 是外分点，则

$$\lambda = \frac{OH_4}{H_4G_4} = -\frac{3}{2}$$

则
$$x_4 = [0 + (-\frac{3}{2}) \times \frac{1}{3}a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3)] \div [1 + (-\frac{3}{2})] = a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3)$$

同样
$$y_4 = a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)$$

即
$$H_4(a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3), a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3))$$

同理，可得到

$$H_3(a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_4), a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_4))$$
$$H_2(a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4), a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4))$$
$$H_1(a(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4), a(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4))$$

设 $\triangle H_2H_3H_4$ 的外接圆圆心为 $O'(x', y')$，故

$$|O'H_1|^2 = |O'H_2|^2 = |O'H_3|^2 = |O'H_4|^2$$

经由循环式，观察易知它们的公共解是

$$x' = a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4)$$
$$y' = a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4)$$

即点 O' 的坐标是 $(a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4), a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4))$.

由此知 $\triangle H_2H_3H_4$ 的外接圆半径是 a，又因为 $|O'H_1| = \sqrt{(a\cos\alpha_1)^2 + (a\sin\alpha_1)^2} = a$，故 H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，且此圆的半径与已知圆圆 O 半径相等，该圆的圆心位置是

$$O'(a(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_4), a(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_4))$$

证毕.

证法 9　（由山东淄博朱恒杰给出）设圆心 O 为坐标原点，点 A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示复数 z_1、z_2、z_3、z_4，且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. 过 O 作 A_3A_4 的垂线交 A_3A_4 于点 M，则点 M 表示的复数是 $\frac{z_3 + z_4}{2}$. 由 $A_2H_1 \underline{\parallel} 2OM$ 知，向量 $\overrightarrow{A_2H_1}$ 表示的复数是 $z_3 + z_4$. 从而点 H_1 表示复数 $z_2 + z_3 + z_4$. 联结 A_1H_1，易知 A_1H_1 中点 P 表示复数 $\frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$. 点 O 关于 P 的对称点 O' 表示复数 $(z_1 +$

$z_2+z_3+z_4)$.而

$$|\overrightarrow{O'H_1}|=|(z_2+z_3+z_4)-(z_1+z_2+z_3+z_4)|=|z_1|$$

同理 $$|\overrightarrow{O'H_2}|=|z_2|,|\overrightarrow{O'H_3}|=|z_3|,|\overrightarrow{O'H_4}|=|z_4|$$

因此 $$|\overrightarrow{O'H_1}|=|\overrightarrow{O'H_2}|=|\overrightarrow{O'H_3}|=|\overrightarrow{O'H_4}|$$

这说明 H_1、H_2、H_3、H_4 四点在同一个圆上,且圆心为 O'.

证法 10 (由武钢三中杨克给出)以 O 为原点建立复平面.以下各字母既代表点,又代表该点对应的复数.

首先,对以 O 为外心的 $\triangle ABC$,若其垂心为 H,则由欧拉定理知,$H=A+B+C$.现令

$$S=A_1+A_2+A_3+A_4$$

则有 $$H_k=S-A_k,k=1,2,3,4$$

从而 $$|H_k-S|=|A_k|,k=1,2,3,4$$

又 A_1、A_2、A_3、A_4,同在以 O 为圆心的圆上,故 $|A_k|$ 为定值.也就是说,H_1、H_2、H_3、H_4 在一以 S 为圆心的圆上,且该圆与圆 O 大小相等.

注 (1)这道考题是流行广泛的一道陈题.

(i)参见梁绍鸿《初等数学复习及研究(平面几何)》第 190 页第 7 题;

(ii)1984 年巴尔干地区三个国家的联赛中已做过考题,参见李炯生等编译《中外数学竞赛》第 40 页第 10.23 题;

(iii)在 1988 年出版的中文版《几何变换》(U.M.亚格龙著)第 36 页也可查到此题.

(2)事实上,上面证法 10 还十分便于推广.

令 $x_k=\lambda\cdot H_k(\lambda\in R,k=1,2,3,4)$,则

$$x_k=\lambda(S-A_k)$$

从而 $$|x_k-\lambda S|=\lambda\cdot|A_k|$$

这样,x_1、x_2、x_3、x_4 在以 λS 为圆心的一个圆上,该圆半径与圆 O 半径之比为 λ.

特别地,由关于欧拉线的知识,有:

(i)$\lambda=\frac{1}{3}$ 时,x_k 为 $\triangle A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ 的重心;

(ii)$\lambda=\frac{1}{2}$ 时,x_k 为 $\triangle A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ 的九点圆心.

其中 $A_{k+4}=A_k,k=1,2,3,4$.

也就是将题中的“垂心”换为“重心”或“九点圆心”后,所得四点仍共圆.

试题 B　设圆 K 和圆 K_1 同心，它们的半径分别是 R、R_1，$R_1 > R$. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 K，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1，点 A_1、B_1、C_1 和 D_1 分别在射线 CD、DA、AB 和 BC 上. 求证：$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geqslant \frac{R_1^2}{R^2}$.

证法 1　简记 S_{ABCD} 为 S，$S_{A_1B_1C_1D_1}$ 为 S_1. 并以 a、b、c、d 分别表示线段 AB、BC、CD、DA 的长度，x、y、z、w 分别表示线段 AB_1、BC_1、CD_1、DA_1 的长度.

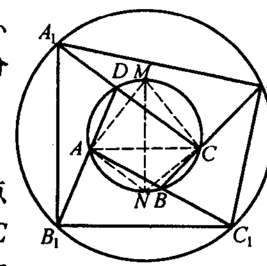


图 14.7

先证下述结论：$ab + cd \leqslant 4R^2$，$ad + bc \leqslant 4R^2$.

事实上，令 M、N 分别为弦 AC 所对的两圆弧的中点（图 14.7），则 $S_{\triangle ANC} \geqslant S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AMC} \geqslant S_{\triangle ADC}$（$\triangle ANC$ 和 $\triangle AMC$ 底边 AC 上的高分别大于等于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 底边 AC 上的高），且显然 MN 是圆 K 的直径. 从而有

$$ab + cd \leqslant AM^2 + AN^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

同理有

$$ad + bc \leqslant 4R^2$$

$$\frac{S_1}{S} = 1 + \frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S} + \frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S} + \frac{S_{\triangle A_1CD_1}}{S} + \frac{S_{\triangle A_1B_1D}}{S}$$

由于

$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S} = \frac{2S_{\triangle AB_1C_1}}{2S_{\triangle ABD} + 2S_{\triangle CBD}} = \frac{x(a+y)\sin \angle B_1AC_1}{ad\sin \angle DAB + bc\sin \angle BCD}$$

显然

$$\angle B_1AC_1 = \pi - \angle DAB = \angle BCD$$

所以

$$\sin \angle B_1AC_1 = \sin \angle DAB = \sin \angle BCD$$

即有

$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S} = \frac{x(a+y)}{ad+bc}$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S} = \frac{y(b+z)}{ab+cd}$$

$$\frac{S_{\triangle A_1CD_1}}{S} = \frac{z(c+w)}{bc+ad}$$

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1D}}{S} = \frac{w(x+d)}{ab+cd}$$

从而得

$$\frac{S_1}{S} = 1 + \frac{x(a+y)}{ad+bc} + \frac{y(b+z)}{ab+cd} + \frac{z(c+w)}{bc+ad} + \frac{w(x+d)}{ab+cd} \geqslant$$
$$1 + \frac{1}{4R^2}[x(a+y) + y(b+z) + z(c+w) + w(x+d)]$$

利用圆幂定理，有

$$x(a+y)=\frac{x}{y}[y(a+y)]=\frac{x}{y}[(R_1-R)(R_1+R)]=\frac{x}{y}(R_1^2-R^2)$$

$$y(b+z)=\frac{y}{z}(R_1^2-R^2)$$

$$z(c+w)=\frac{z}{w}(R_1^2-R^2)$$

$$w(x+d)=\frac{w}{x}(R_1^2-R^2)$$

所以有

$$\frac{S_1}{S}\geqslant 1+\frac{R_1^2-R^2}{4R^2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}\right)\geqslant 1+\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\left[\sqrt[4]{\frac{xyzw}{xyzw}}\right]=\frac{R_1^2}{R^2}$$

证法2 将四边形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积分别记为 S 和 S_1，于是有

$$\frac{S_1}{S}=1+\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}+\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S}+\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S}+\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S} \quad ①$$

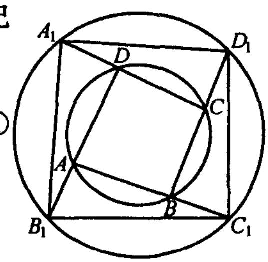


图 14.8

因为 $\angle B_1AC_1=180^\circ-\angle DAB=\angle DCB=180^\circ-\angle A_1CD_1$

$\angle A_1DB_1=180^\circ-\angle ADC=\angle ABC=180^\circ-\angle C_1BD_1$

所以
$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}=\frac{x(a+y)}{ad+bc},\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S}=\frac{y(b+z)}{ab+cd}$$
$$\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S}=\frac{z(c+w)}{ad+bc},\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S}=\frac{w(d+x)}{ab+cd} \quad ②$$

其中 $a=AB,b=BC,c=CD,d=DA,x=AB_1,y=BC_1,z=CD_1,w=DA_1$，如图 14.8 所示. 由切割线定理知

$$x(d+x)=y(a+y)=z(b+z)=w(c+w)=R_1^2-R^2$$

从而由式 ①，式 ② 及均值不等式便得

$$\frac{S_1}{S}=1+(R_1^2-R^2)\left[\frac{x}{y(ad+bc)}+\frac{y}{z(ab+cd)}+\frac{z}{w(ad+bc)}+\frac{w}{x(ab+cd)}\right]\geqslant$$
$$1+4(R_1^2-R^2)\frac{1}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}} \quad ③$$

再由均值不等式又有

$$2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}\leqslant(ad+bc)+(ab+cd)=(a+c)(b+d)\leqslant$$

$$\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \leqslant 8R^2 \qquad ④$$

其中最后一个不等式是因为圆内接四边形中,正方形的周长最大. 将式 ④ 代入式 ③ 得

$$\frac{S_1}{S} \geqslant 1+\frac{R_1^2-R^2}{R^2}=\frac{R_1^2}{R^2}$$

证法 3　记 $S_1=S_{A_1B_1C_1D_1}$, $S=S_{ABCD}$, 如图 14.9 所示. 则

$$\frac{S_1}{S}=\frac{S+S_{\triangle AB_1C_1}+S_{\triangle BC_1D_1}+S_{\triangle CD_1A_1}+S_{\triangle DA_1B_1}}{S}=$$

$$1+\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}+\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S}+\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S}+\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S}$$

而　$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}=\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}}=\frac{\frac{1}{2}x(a+y)\sin\angle B_1AC_1}{\frac{1}{2}ad\sin\angle DAB+\frac{1}{2}bc\sin\angle BCD}$$

由于　$\angle B_1AC_1=\pi-\angle DAB=\angle BCD$

则　$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}=\frac{x(a+y)}{ad+bc}$$

同理　$$\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S}=\frac{y(b+z)}{ab+cd}$$

$$\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S}=\frac{z(c+w)}{bc+ad}$$

$$\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S}=\frac{w(d+x)}{cd+ab}$$

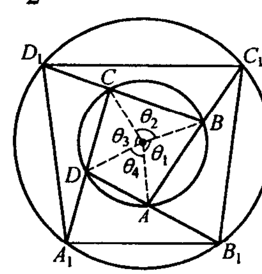


图 14.9

又由切割线定理知

$$y(a+y)=R_1^2-R^2$$

则　$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S}=\frac{x}{y(ad+bc)}(R_1^2-R^2)$$

同理　$$\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S}=\frac{y}{z(ab+cd)}(R_1^2-R^2)$$

$$\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S}=\frac{z}{w(bc+ad)}(R_1^2-R^2)$$

$$\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S}=\frac{w}{x(ab+cd)}(R_1^2-R^2)$$

从而

$$\frac{S_1}{S}=1+\left[\frac{x}{y(ad+bc)}+\frac{y}{z(ab+cd)}+\frac{z}{w(ad+bc)}+\frac{w}{x(ab+cd)}\right](R_1^2-R^2)\geqslant$$

$$1+4\sqrt[4]{\frac{1}{(ad+bc)^2(ab+cd)^2}}\cdot(R_1^2-R^2)$$

又 $$a=2R\sin\frac{\theta_1}{2},b=2R\sin\frac{\theta_2}{2},c=2R\sin\frac{\theta_3}{2},d=2R\sin\frac{\theta_4}{2}$$

故 $$(ad+bc)(ab+cd)=16R^4\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\right)$$

注意到 $$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\pi-\frac{\theta_3+\theta_4}{2},\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=-\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

从而 $$\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\right)\leqslant 1$$

同样 $$\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\leqslant 1$$

则 $$\frac{S_1}{S}\geqslant 1+4\sqrt[4]{\frac{1}{(16R^4)^2}}(R_1^2-R^2)=1+4\frac{R_1^2-R^2}{4R^2}=\frac{R_1^2}{R^2}$$

故 $$\frac{S_1}{S}\geqslant\frac{R_1^2}{R^2}$$

试题 C △ABC 的 $\angle A$ 的平分线与 △ABC 的外接圆交于点 D，点 I 是 △ABC 的内心，点 M 是边 BC 的中点，P 是 I 关于 M 的对称点(设点 P 在圆内)。延长 DP 与外接圆相交于点 N. 试证：在 AN、BN、CN 三条线段中，必有一条线段是另两条线段之和.

证法 1 如图 14.10，不妨设 N 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上. 待证 $BN+CN=AN$. 显然

$$S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}=2S_{\triangle MND}$$

因点 P 在 ND 上，且 $IM=MP$，则

$$2S_{\triangle MND}=S_{\triangle IND}=S_{\triangle BND}+S_{\triangle CND}\quad (*)$$

令 $\angle NAD=\theta$，则

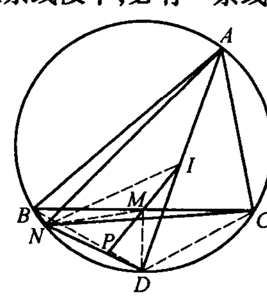


图 14.10

$$\angle NBD = \angle NCD = \theta$$

于是

$$S_{\triangle BND} = \frac{1}{2} BD \cdot BN \sin \theta$$

$$S_{\triangle CND} = \frac{1}{2} CD \cdot CN \sin \theta$$

$$S_{\triangle IND} = \frac{1}{2} ID \cdot AN \sin \theta$$

及熟知的结果 $BD = CD = ID$,代入(*)即得

$$BN + CN = AN$$

证法 2 (由单樽教授给出)如图 14.11,设 $\triangle ABC$ 的边为 a、b、c,角为 2α、2β、2γ,又设 $\angle NCB = \delta$,易知 $\angle PCB = \beta$,$\angle PBC = \gamma$ 及图中各角.所以

$$PN = \frac{PB}{\sin \alpha} \sin (2\beta + 3\gamma - \delta) = \frac{PC}{\sin \alpha} \sin (\beta + \delta)$$

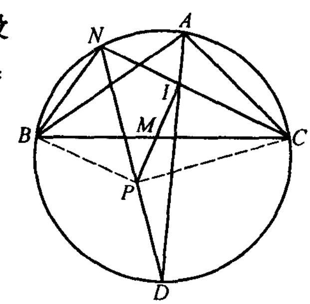


图 14.11

从而　$\sin \beta \sin (2\beta + 3\gamma - \delta) = \sin \gamma \sin (\beta + \delta)$

即　$\cos (3\beta + 3\gamma - \delta) - \cos (\beta + 3\gamma - \delta) = \cos (\beta + \gamma + \delta) - \cos (\beta - \gamma + \delta)$

移项再和差化积得

$$\sin (2\beta + 2\gamma) \sin (\beta + \gamma - \delta) = \sin (\beta + \gamma) \sin (2\gamma - \delta)$$

即

$$\sin 2\alpha \cos (\alpha + \delta) = \cos \alpha \sin (2\gamma - \delta)$$

约去 $\cos \alpha$ 后化为

$$\sin (2\alpha + \delta) - \sin \delta = \sin (2\gamma - \delta)$$

由正弦定理,上式即 $NC - NB = NA$,所以 $NC = NA + NB$.

第 1 节　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形问题[①]

命题 1　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形的垂心构成的四边形与原四边形全等,且每一顶点与其他三顶点所成三角形的垂心之连线共点,共点于两全等四边形外心连线段的中点.

① 沈文选.从一道竞赛题谈起[J].湖南数学通讯,1993(1):30-33.

证明　如图 14.12,由于三角形任一顶点至该三角形垂心的距离,等于外心至其对边的距离的两倍,于是 A_3H_3 的长度等于 O 到 A_1A_4 的距离的两倍,A_2H_4 的长度等于 O 到 A_1A_4 的距离的两倍,且 A_3H_3、A_2H_4 均与 A_1A_4 垂直,故 $H_3H_4A_2A_3$ 为平行四边形,即有 $H_3H_4 \underline{\parallel} A_3A_2$.

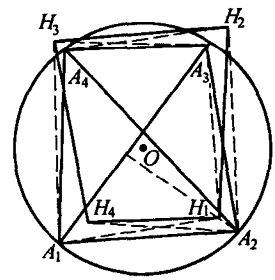


图 14.12

同理,$H_1H_2 \underline{\parallel} A_1A_4$,$H_2H_3 \underline{\parallel} A_1A_2$,$H_4H_1 \underline{\parallel} A_4A_3$.

故四边形 $H_1H_2H_3H_4 \cong$ 四边形 $A_4A_1A_2A_3$

由于平行四边形 $A_1A_2H_2H_3$、$A_2A_3H_3H_4$、$A_3A_4H_4H_1$ 有相同的中心 P,则四线 A_4H_1、A_1H_2、A_2H_3、A_3H_4 共点于 P.且 P 是 A_i 和 H_{i+1}($i=1,2,3,4$,且 $H_5=H_1$)的对称中心,故 P 是 $H_1H_2H_3H_4$ 与 $A_4A_1A_2A_3$ 的外心的对称中心,即 P 是两全等四边形外心连线段的中点.

顺此联想,我们发现圆内接四边形四顶点组成的三角形还有如下一系列涉及其外心、重心、内心、旁心、西姆松线、九点圆等的美妙结论.

命题 2　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形外心共点于原四边形的外心.

命题 3　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形重心构成的四边形与原四边形相似.

证明　如图 14.13,设 M_1、M_2、M_3、M_4 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的重心,E 为 A_2A_3 的中点.联结 A_1E、A_4E,则 M_1 在 A_1E 上,M_2 在 A_4E 上.于是,在 $\triangle EA_4A_1$ 中,$M_1M_2 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_1A_4$.

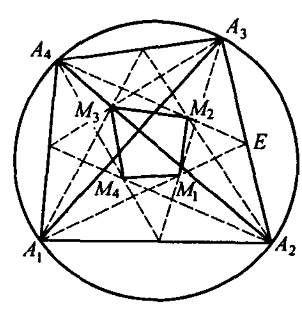


图 14.13

同理

$$M_2M_3 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_1A_2$$

$$M_3M_4 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_3A_2$$

$$M_4M_1 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_4A_3$$

又四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 与 $A_4A_1A_2A_3$ 的对应角相等.故四边形 $M_1M_2M_3M_4 \backsim$ 四边形 $A_4A_1A_2A_3$.

命题 4　圆内接四边形一条对角线分成的两个三角形的内心与此对角线两端点的连线交圆于四点，相对两点的连线互相垂直.

证明　如图 14.14，因 M 在 $\angle A_1A_4A_2$ 的平分线 A_4I_4 上，所以 M 平分 $\widehat{A_1A_2}$.

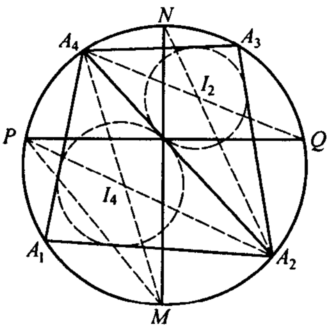


图 14.14

同理，Q、N、P 分别平分 $\widehat{A_2A_3}$、$\widehat{A_3A_4}$、$\widehat{A_4A_1}$.

联结 MP，则 $\angle MPQ$ 对的弧是 $\angle A_1A_4A_3$ 所对弧的一半，即 $\angle MPQ = \frac{1}{2}\angle A_1A_4A_3$. 同理 $\angle PMN = \frac{1}{2}\angle A_1A_2A_3$.

而 $\angle A_1A_4A_3 + \angle A_1A_2A_3 = 180°$，故 $\angle MPQ + \angle PMN = 90°$，从而 $MN \perp PQ$.

命题 5　圆内接四边形四顶点组成的两相交三角形的内心与公切边所对弧的中点构成等腰三角形，且两内心连线为底边.

证明　如图 14.15，I_2、I_3 分别是 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$ 的内心. 联结 A_3I_3 并延长交四边形外接圆于点 N，则 N 为 $\widehat{A_1A_4}$ 的中点，设 P 为 $\widehat{A_4A_3}$ 的中点，则 P 在 $\angle A_4A_1A_3$ 的平分线上，从而 $\angle A_4NP = \angle PNI_3$，$\angle A_4PN = \angle NPA_1$，于是 $\triangle NA_4P \cong \triangle NI_3P$，则 $PI_3 = PA_4$.

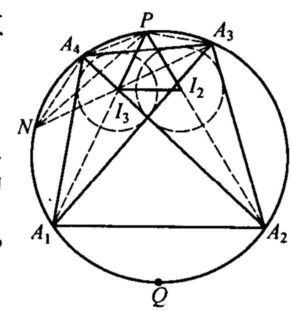


图 14.15

同理 $PI_2 = PA_3$，而 $PA_4 = PA_3$，故 $PI_3 = PI_2$.

若 Q 为 A_1A_2 的中点，也可证 $QI_3 = QI_2$.

命题 6　圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，设 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的内心分别记为 I_1、I_2、I_3、I_4；其内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4；边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 上的切点依次是 E、F、M、N、G、H、P、Q. 则

(1) $EF = GH, MN = PQ$.

(2) $EF \cdot MN = r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4$.

(3) $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

(4) $|r_1 - r_2| = |r_3 - r_4|$，$|r_1 - r_4| = |r_2 - r_3|$；

(5) 四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 是矩形.

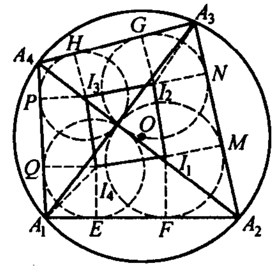


图 14.16

证明 (1) 如图 14.16.

$$A_1E=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_1A_4-A_2A_4)$$

$$A_2F=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_2A_3-A_1A_3)$$

从而 $$EF=A_1A_2-A_1E-A_2F=\frac{1}{2}(A_1A_3+A_2A_4-A_1A_4-A_2A_3)$$

又 $$A_3G=\frac{1}{2}(A_3A_4+A_2A_3-A_2A_4)$$

$$A_4H=\frac{1}{2}(A_1A_4+A_3A_4-A_1A_3)$$

从而 $$GH=A_3A_4-A_3G-A_4H=\frac{1}{2}(A_1A_3+A_2A_4-A_1A_4-A_2A_3)$$

故 $$EF=GH$$

同理 $$MN=PQ$$

(2) 联结 A_1I_4、EI_4、A_3I_2、GI_2，如图 14.16，由 $\angle A_4A_1A_2+\angle A_4A_3A_2=180°$，有

$$\angle I_4A_1E+\angle I_2A_3G=90°$$

所以 $$Rt\triangle A_1I_4E\backsim Rt\triangle I_2A_3G$$

所以 $$A_1E\cdot A_3G=I_4E\cdot I_2G=r_4\cdot r_2$$

同理 $$A_2M\cdot A_4P=r_1\cdot r_3$$

又 $$A_1E=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_1A_4-A_2A_4)$$

$$A_3G=\frac{1}{2}(A_3A_4+A_2A_3-A_2A_4)$$

所以 $$r_2\cdot r_4=\frac{1}{4}(A_1A_2+A_1A_4-A_2A_4)(A_3A_4+A_2A_3-A_2A_4)$$

同理 $$r_1\cdot r_3=\frac{1}{4}(A_1A_2+A_2A_3-A_1A_3)(A_3A_4+A_4A_1-A_1A_3)$$

故 $$4(r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_4)=A_2^2A_4^2+A_1^2A_3^2-(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)\cdot(A_2A_4+A_1A_3)+(A_1A_2\cdot A_2A_3+A_2A_3\cdot A_3A_4+A_3A_4\cdot A_4A_1+A_4A_1\cdot A_1A_2)+2(A_1A_2\cdot A_3A_4+A_2A_3\cdot A_4A_1)=(A_2A_4+A_1A_3)^2-[(A_1A_2+A_3A_4)+$$

$$(A_2A_3 + A_1A_4)](A_2A_4 + A_1A_3) +$$
$$(A_1A_2 + A_3A_4)(A_2A_3 + A_4A_1) =$$
$$(A_1A_3 + A_2A_4 - A_1A_2 - A_3A_4)\cdot$$
$$(A_1A_3 + A_2A_4 - A_2A_3 - A_4A_1) = 2EF\cdot 2MN$$

为了证明(3)与(4),下面先介绍一条引理.

$\triangle ABC$ 内接于半径为 R,圆心为 O 的圆,如果 O、A 在直线 BC 的同侧,记 d_{BC} 为 O 到 BC 的距离,否则 d_{BC} 为 O 到 BC 距离的相反数,若 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,则 $d_{BC}+d_{AC}+d_{AB}=R+r$.

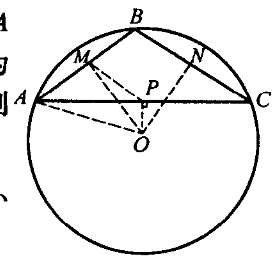


图 14.17

事实上,如图 14.17,作 AB、BC、CA 的垂线段 OM、ON、OP,则 A、M、P、O 四点共圆,由托勒密定理,有

$$OA\cdot MP + OP\cdot AM = OM\cdot AP$$

令 $BC=a,AC=b,AB=c$,则

$$R\cdot\frac{a}{2}+(-d_{AC})\cdot\frac{c}{2}=d_{AB}\cdot\frac{b}{2}$$

即
$$b\cdot d_{AB}+c\cdot d_{AC}=R\cdot a$$

同理
$$c\cdot d_{BC}+a\cdot d_{AB}=R\cdot b$$
$$a\cdot d_{AC}+b\cdot d_{BC}=R\cdot c$$

三式相加

$$(d_{AC}+d_{AB})a+(d_{AB}+d_{BC})b+(d_{BC}+d_{AC})c=R(a+b+c) \quad ①$$

又
$$2S_{\triangle ABC}=(a+b+c)r$$

$$2S_{\triangle ABC}=2(S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}-S_{\triangle CAO})=c\cdot d_{AB}+a\cdot d_{BC}+b\cdot d_{AC}$$

所以

$$a\cdot d_{BC}+b\cdot d_{AC}+c\cdot d_{AB}=(a+b+c)r \quad ②$$

① + ② 得

$$(a+b+c)(d_{BC}+d_{AC}+d_{AB})=(a+b+c)(R+r)$$

故
$$d_{BC}+d_{AC}+d_{AB}=R+r$$

(3) 不失一般性,设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 在图 14.16 中位置,由上面的引理有

$$r_1=d_{A_1A_2}+d_{A_2A_3}+d_{A_1A_3}-R=|d_{A_1A_2}|+|d_{A_2A_3}|+|d_{A_1A_3}|-R$$
$$r_2=d_{A_2A_4}+d_{A_2A_3}+d_{A_3A_4}-R=|d_{A_2A_4}|+|d_{A_2A_3}|+|d_{A_3A_4}|-R$$

$$r_3 = d_{A_1A_3} + d_{A_1A_4} + d_{A_3A_4} - R = -|d_{A_1A_3}| + |d_{A_1A_4}| + |d_{A_3A_4}| - R$$

$$r_4 = d_{A_2A_4} + d_{A_1A_4} + d_{A_1A_2} - R = -|d_{A_2A_4}| + |d_{A_1A_4}| + |d_{A_1A_2}| - R$$

所以

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

(4) 由上即有 $|r_1 - r_2| = |r_3 - r_4|$, $|r_1 - r_4| = |r_2 - r_3|$.

(5) 我们可给出其多种证明方法如下.

证法1 如图 14.16,由上面结论(1)、(4) 先证得 $I_1I_2I_3I_4$ 为平行四边形. 再证 I_1、I_2、I_3、I_4 四点共圆即证.

证法2 如图 14.18,由命题4知,$PQ \perp MN$,由命题 5 推知 $PQ \perp I_2I_3$, $PQ \perp I_4I_1$, $MN \perp I_1I_2$, $MN \perp I_3I_4$,故四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 为矩形.

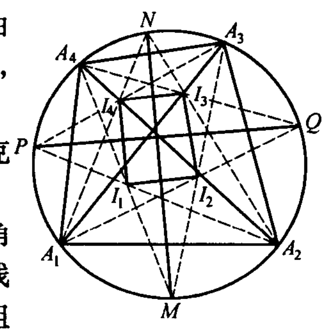


图 14.18

注 命题6中的(5) 曾作为首届数学奥林匹克国家集训队选拔试题(见第7章试题 C1).

命题7 圆内接四边形四顶点组成的四个三角形的内心、旁心共十六点,分配在八条直线上,每线上四点,而这八条线是互相垂直的两组平行线,每组含四线.

此为富尔曼定理,证略.

命题8 四边形外接圆上任一点在它对于四边形四顶点组成的四个三角形的西姆松上的射影共线.

命题9 四边形外接圆上任两点对于四边形四顶点组成四个三角形中每个三角形的两条西姆松线各交于一点,这样的四点共线.

命题10 圆内接四边形的四个顶点组成的四个三角形的九点圆,这样的四圆会于一点.

以上的命题8,9,10 均系梁绍鸿编《初等数学复习及研究》中复习题三:46、47(5) 及 63.证明均略.

命题11 设四边形 $H_1H_2H_3H_4$、四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 分别是圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的以四顶点组成的四个三角形的垂心四边形、重心四边形,则三个圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$、$H_1H_2H_3H_4$、$G_1G_2G_3G_4$ 彼此互相位似,三个圆心共线.

证明 首先,如图 14.19,设 A_1G_1、A_4G_4 相交于 G_0,联结 A_1G_4,A_1G_4 交 A_2A_3 于 M,则 M 是 A_2A_3 中点.联结 A_4M, G_1 在 A_4M 上.

$\triangle A_1MG_1$ 被直线 $A_4G_0G_4$ 所截，由梅涅劳斯定理，$\frac{G_1G_0}{G_0A_1}\cdot\frac{A_1G_4}{G_4M}\cdot\frac{MA_4}{A_4G_1}=1$，由重心性质 $\frac{A_1G_4}{G_4M}=\frac{2}{1}$，$\frac{MA_4}{A_4G_1}=\frac{3}{2}$，由此得 $\frac{G_1G_0}{G_0A_1}=\frac{1}{3}$，同理 $\frac{G_4G_0}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$，即 A_1G_1 通过 A_4G_4 上一定点 G_0，且被 G_0 分为 $1:3$，同法可证 A_2G_2、A_3G_3 都通过 A_4G_4 上定点 G_0，且被 G_0 分为 $1:3$. 从而

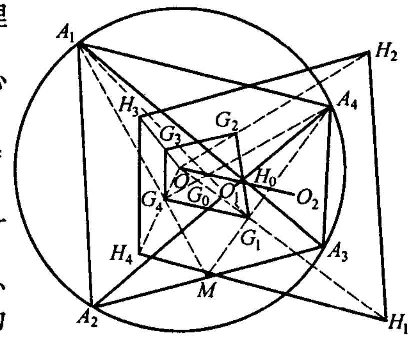


图 14.19

(1) A_1G_1、A_2G_2、A_3G_3、A_4G_4 都经过同一点 G_0；

(2) $\frac{G_0G_1}{G_0A_1}=\frac{G_0G_2}{G_0A_2}=\frac{G_0G_3}{G_0A_3}=\frac{G_0G_4}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$.

所以四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与 $A_1A_2A_3A_4$ 成位似，位似中心是 G_0，位似比 $k_1=\frac{1}{3}$，对应点都在位似中心两旁，它们互相成内位似. 因四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 O，故四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 也内接于圆，设其圆心为 O_1，O_1 与 O 是在此位似变换中的一对对应点. 由于在位似变换中，对应点连线必过位似中心. 故 O、G_0、O_1 三点共线. 联结 OG_0，在 OG_0 延长线上取点 O_1，使

$$G_0O_1=\frac{1}{3}OG_0\cdots \qquad ①$$

则此点 O_1 就是圆 $G_1G_2G_3G_4$ 之圆心.

其次，由欧拉线定理，三角形外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，且 $GH=2OG$. 而由已知条件，O、$G_iH_i(i=1,2,3,4)$ 共线，它们分别是题设四个三角形的欧拉线. 因此四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 对应点连线经过同一点 O，且有 $\frac{OH_i}{OG_i}(i=1,2,3,4)=3$. 故这两个四边形成外位似(对应点在 O 同旁). 位似中心为 O，位似比 $k=3$，由四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 内接于圆知 $H_1H_2H_3H_4$ 也内接于圆，设后者圆心为 O_2，O_2 与 O_1 是此位似变换对应点，O_1O_2 连线必过位似中心 O. 要确定 O_2 位置，只需要在 OO_1 延长线上截

$$OO_2=3OO_1\cdots \qquad ②$$

则 O_2 为所求. 再由位似变换传递性知，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与 $A_1A_2A_3A_4$ 也成位似. 位似比为 $k=k_1k_2=\frac{1}{3}\times 3=1$. 由此可见三个圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$、

$H_1H_2H_3H_4$、$G_1G_2G_3G_4$ 彼此互相位似,三圆心 O、O_2、O_1 共线,且$\frac{OO_1}{O_1O_2}=\frac{1}{2}$.

注 上面证明启示我们得出另一重要结论.

四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $H_1H_2H_3H_4$ 成位似,则对应点连线 $A_iH_i(i=1,2,3,4)$ 四线共点于位似中心(记为 H_0).又由于位似比为1,故 H_0 必为对应点 O、O_2 连线段之中点,即

$$OH_0=\frac{1}{2}OO_2\cdots \qquad ③$$

这里定义 O、G_0、H_0 分别为四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心、重心、垂心,则得欧拉线之推广:圆内接四边形的外心 O、重心 G_0、垂心 H_0 共线,且由 ①、②、③ 推知 $\frac{OG_0}{G_0H_0}=1$.同时,圆 $G_1G_2G_3G_4$、圆 $H_1H_2H_3H_4$ 的圆心 O_1 和 O_2 也在此直线上(五点共线),不难计算 $OG_0:G_0O_1:O_1H_0:H_0O_2=3:1:2:6$.

第2节 圆内接四边形的两个充要条件

为了讨论问题的方便,我们先看几个引理.①②③

引理1 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,$\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4,则 $r_1+r_3=r_2+r_4$.

事实上,由本章第1节中命题6(3)即得.

引理2 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,对角线为 AC、BD,记 $AD=a,AB=b$,$BC=c,CD=d,BD=x,AC=y$,则$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$.

证明 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中分别运用余弦定理有

$$\begin{aligned} x^2&=a^2+b^2-2ab\cos\angle BAD\\ x^2&=c^2+d^2-2cd\cos\angle BCD \end{aligned} \qquad (*)$$

由于四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形,故 $\angle BCD=\pi-\angle BAD$,因此由式$(*)$知

$$a^2+b^2-2ab\cos\angle BAD=c^2+d^2+2cd\cos\angle BAD$$

故有
$$\cos\angle BAD=\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$$

① 孙幸荣,汪飞.两个优美的几何恒等式[J].数学通报,2005(2):57-58.
② 贯福春.四边形的两个优美性质[J].中学数学,2005(7):47.
③ 邹黎明.涉及四边形的两个优美结论[J].中学数学,2005(12):37-38.

将其代入式(*)得 $$x^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}$$

同理可得 $$y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$$

所以 $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}$$

故 $$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

引理 3　四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 中 AC、BD 一侧的旁切圆半径分别为 r_A、r_B、r_C、r_D，则 $r_A+r_C=r_B+r_D$

证明　如图 14.20，引用引理 2 中的记号，并记圆 O 的半径为 R，由三角形的面积公式，得

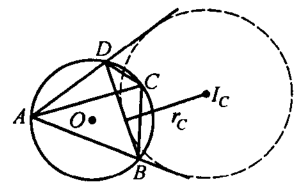


图 14.20

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(b+c-y)r_D=\frac{bcy}{4R}$$

所以 $$2Rr_D=\frac{bcy}{b+c-y}$$

同理 $$2Rr_B=\frac{ady}{a+d-y}$$

$$2Rr_C=\frac{abx}{a+b-x}$$

$$2Rr_A=\frac{cdx}{c+d-x}$$

于是

$$r_A+r_C=r_B+r_D\Leftrightarrow\frac{abx}{a+b-x}+\frac{cdx}{c+d-x}=\frac{ady}{a+d-y}+\frac{bcy}{b+c-y}\quad①$$

由引理 2 知，$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$，将其变形可得

$$ab(c+d-x)+cd(a+b-x)=ad(b+c-y)+bc(a+d-y)\quad②$$

把式 ① 通分，并运用式 ②，可得

$$\text{式①}\Leftrightarrow x(a+d-y)(b+c-y)=y(a+b-x)(c+d-x)\quad③$$

而　式 ③ 左边 $=[x(a+d)-xy](b+c-y)=$

$[(a+d)x-(ac+bd)](b+c-y)=(ac+bd)y+$

$(a+d)(b+c)x-(b+c)(ac+bd)-(a+d)xy=$

$(ac+bd)y+(ac+bd)x+(ab+cd)x-(a+b+c+d)xy=$

$(ac+bd)x+(ac+bd)y+(ad+bc)y-(c+d)xy-$

$$(a+b)xy = x^2y + (a+b)(c+d)y - (c+d)xy -$$
$$(a+b)xy = (a+b)y(c+d-x) - xy(c+d-x) =$$
$$(c+d-x)(a+b-x)y = \text{式③右边}$$

可见,原命题成立.

引理 4　四边形 $ABCD$ 中,若 $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$,则四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 是矩形.如图 14.21 所示.

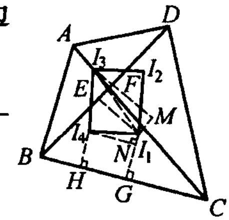


图 14.21

证明　作 $I_1G \perp BC$ 于点 G,$I_4H \perp BC$ 于点 H,$I_4N \perp I_1G$ 于点 N,则

$$BH = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$$

$$CG = \frac{1}{2}(BC + CD - BD)$$

则 $$GH = BC - BH - CG = \frac{1}{2}(BD + AC - AB - CD)$$

又 $$I_1N = |r_1 - r_4|$$

故 $$I_1I_4^2 = (r_1 - r_4)^2 + \frac{1}{4}(BD + AC - AB - CD)^2$$

同理 $$I_2I_3^2 = (r_2 - r_3)^2 + \frac{1}{4}(BD + AC - AB - CD)^2$$

由 $$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

有 $$r_1 - r_4 = r_2 - r_3$$

即 $$I_1I_4 = I_2I_3$$

同理 $$I_1I_2 = I_4I_3$$

故四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 是平行四边形.

又作 $I_1E \perp BD$ 于点 E,$I_3F \perp BD$ 于点 F,作 $I_1M \perp I_3F$ 于点 M,则

$$I_3M = r_1 + r_3$$

又 $$EF = |BD - DE - BF|$$

又 $$DE = \frac{1}{2}(BD + DC - BC)$$

$$BF = \frac{1}{2}(BD + AB - AD)$$

则 $$EF = \frac{1}{2}|AD + BC - AB - CD|$$

即 $$I_1I_3^2 = (r_1 + r_3)^2 + \frac{1}{4}(AD + BC - AB - CD)^2$$

同理　$I_2I_4^2=(r_2+r_4)^2+\frac{1}{4}(AD+BC-AB-CD)^2$

则　$I_1I_3=I_2I_4$

故 $\square I_1I_2I_3I_4$ 是矩形.

引理 5　四边形 $ABCD$ 中,若 $r_A+r_C=r_B+r_D$,则四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

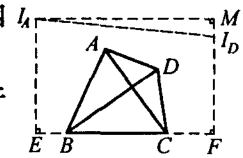


图 14.22

证明　如图 14.22,作 $I_AE\perp BC$ 于点 E,$I_DF\perp BC$ 于点 F,$I_AM\perp I_DF$ 于点 M,则

$$I_DM=|r_A-r_D|$$

$$EF=EC+CF=\frac{1}{2}(BC+CD+BD)+\frac{1}{2}(AB+BC+AC)-BC=$$

$$\frac{1}{2}(AB+CD+AC+BD)$$

则　$I_AI_D^2=(r_A-r_D)^2+\frac{1}{4}(AB+CD+AC+BD)^2$

同理　$I_BI_C^2=(r_B-r_C)^2+\frac{1}{4}(AB+CD+AC+BD)^2$

由　$r_A+r_C=r_B+r_D$

有　$r_A-r_D=r_B-r_C$

则　$I_AI_D=I_BI_C$

同理　$I_AI_B=I_CI_D$

即四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 是平行四边形.

同理

$$I_AI_C^2=I_BI_D^2=(r_A+r_C)^2+\frac{1}{4}(AD+BC-AB-CD)^2$$

故 $\square I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

引理 6　四边形 $ABCD$ 中,若 $r_1+r_3=r_2+r_4$,则四边形 $ABCD$ 内接于圆.

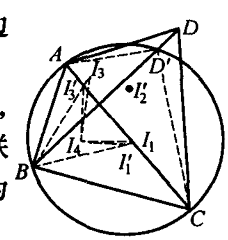


图 14.23

证明　(反证法)如图 14.23,作 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O,假设 D 不在圆周上,设圆 O 交 BD(或 BD 延长线)于 D',联结 AD'、CD',设 $\triangle ABD'$、$\triangle BCD'$、$\triangle ACD'$ 的内心分别记为 I'_3、I'_1、I'_2,半径分别记为 r'_3、r'_1、r'_2.

由引理 1 知 $r'_1+r'_3=r'_2+r_4$,又由引理 4 知四边形 $I'_1I'_2I'_3I_4$ 是矩形,则

$$\angle I'_3I_4I'_1 = 90°$$

(i) 若 D' 在线段 BD 上,易知 B、I'_3、I_3 在一直线上,B、I'_1、I_1 在一直线上,因

$$\angle I'_3AB = \frac{1}{2}\angle D'AB < \frac{1}{2}\angle DAB = \angle I_3AB$$

则 I'_3 在线段 BI_3 上.

同理 I'_1 在线段 BI_1 上.故

$$\angle I'_3I_4I'_1 > \angle I_3I_4I_1$$

又由引理4知,当 $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ 时,四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 是矩形,即

$$\angle I_3I_4I_1 = 90°$$

矛盾.

(ii) 若 D' 在线段 BD 的延长线上,亦矛盾.故四边形 $ABCD$ 有外接圆.

引理7 四边形 $ABCD$ 中,$r_A + r_C = r_B + r_D$,则四边形 $ABCD$ 内接于圆.

证明 (反证法)如图14.24,作 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O,假设 D 不在圆周上,设圆 O 与 BD(或 BD 的延长线)交于 D',联结 AD'、CD',设 $\triangle BCD'$、$\triangle ACD'$、$\triangle ABD'$ 中 AC、BD 一侧的旁切圆圆心分别记为 I'_A、I'_B、I'_C,半径分别记为 r'_A、r'_B、r'_C.由引理2知 $r'_A + r'_C = r'_B + r_D$,由引理5知 $I'_AI'_BI'_CI_D$ 是矩形,故

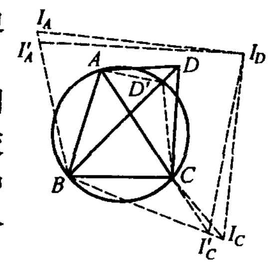


图 14.24

$$\angle I'_AI_DI'_C = 90°$$

(i) 若 D' 在线段 BD 上,易知点 B、I'_C、I_C 在一直线上,点 B、I'_A、I_A 在一直线上.又

$$\angle BCI'_C = \frac{1}{2}\angle BCD' < \frac{1}{2}\angle BCD = \angle BCI_C$$

则 I'_C 在线段 BI_C 上.同理 I'_A 在线段 BI_A 上.则

$$\angle I_AI_DI_C > I'_AI_DI'_C$$

又

$$r_A + r_C = r_B + r_D$$

由引理5,四边形 $I_AI_BI_CI_D$ 是矩形,故

$$\angle I_AI_DI_C = 90°$$

矛盾.

(ii) 若 D' 在线段 BD 的延长线上,亦可得矛盾.故四边形 $ABCD$ 内接于圆.

由引理1、引理6,即得

命题 1 在四边形 $ABCD$ 中,$\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4,则四边形 $ABCD$ 有外接圆的充要条件是 $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

由引理 3、引理 7,即得

命题 2 在四边形 $ABCD$ 中,$\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的位于 AC、BD 一侧的旁切圆半径分别为 r_A、r_B、r_C、r_D,则四边形 $ABCD$ 有外接圆的充要条件是 $r_A + r_C = r_B + r_D$.

第 3 节 垂心余弦定理及应用

定理 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,垂心为 H,则 $AH = 2R\,|\cos A|$,$BH = 2R\,|\cos B|$,$CH = 2R\,|\cos C|$.

证明 如图 14.25,记 $\angle BAC = \angle A$,$\angle ABC = \angle B$,$\angle BCA = \angle C$,因 $\angle AHE = \angle C$,于是在 $\triangle AHE$ 中,有

$$AH = \frac{AE}{\sin \angle AHE} = \frac{AE}{\sin C}$$

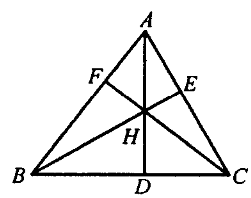


图 14.25

在 $\triangle ABE$ 中

$$AE = AB\,|\cos A| \quad ①$$

所以

$$AH = \frac{AB\,|\cos A|}{\sin C} = 2R\,|\cos A|$$

同理

$$BH = 2R\,|\cos B|,\ CH = 2R\,|\cos C|$$

由于定理结构与正弦定理相似,故我们把它称之为垂心余弦定理.

注 在 $\triangle ABC$ 中,当 $\angle A > 90^\circ$ 时,AH 的方向远离对边 BC,而此时 $\angle B$、$\angle C$ 皆为锐角,BH、CH 皆指向其对边.为了消除式 ① 中的绝对值符号,不妨规定"垂距"(顶点到垂心的距离)的有向值:若 AH 指向对边,其值为正,否则其值为负,如此一来,公式可以写成

$$\frac{AH}{\cos A} = \frac{BH}{\cos B} = \frac{CH}{\cos C} = 2R$$

为了应用上的方便,也可以将上式写成其等价形式

$$AH = 2R\cos A,\ BH = 2R\cos B,\ CH = 2R\cos C$$

(只须注意:当 $\angle A = 90^\circ$,$AH = 0$ 时,规定 $\frac{AH}{\cos A} = 2R$)

例 1　设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D、E、F 分别是 BC、CA、AB 的中点. 一个以 H 为圆心的圆 H 交直线 EF、FD、DE 于 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2(图 14.26). 求证：$AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2$.

(1989 年加拿大数学奥林匹克训练题)

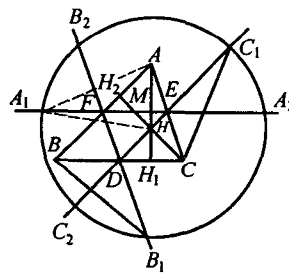


图 14.26

证明　设 $AB = c, BC = a, CA = b$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，圆 H 的半径为 r，联结 HA_1，联结 AH 交 EF 于点 M，从而有 $AM \perp A_1A_2$，且 $AM = \frac{1}{2}AH_1$. 则

$$AA_1^2 = AA_2^2 = AM^2 + A_1M^2 = AM^2 + r^2 - MH^2 =$$

$$(\frac{1}{2}AH_1)^2 + r^2 - (AH - \frac{1}{2}AH_1)^2 = r^2 + AH \cdot AH_1 - AH^2 \qquad ①$$

又由于 B、H_2、H、H_1 四点共圆，于是有 $AH \cdot AH_1 = AH_2 \cdot AB$，而

$$AH_2 \cdot AB = b\cos A \cdot c = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \qquad ②$$

由定理及正弦定理可得

$$AH^2 = 4R^2\cos^2 A, a^2 = 4R^2\sin^2 A$$

于是即得

$$AH^2 = 4R^2 - a^2 \qquad ③$$

把 ②、③ 代入 ① 整理得

$$AA_1^2 = AA_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2 + r^2$$

同理

$$BB_1^2 = BB_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2 + r^2$$

$$CC_1^2 = CC_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2 + r^2$$

于是结论得证.

例 2　锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，r 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径，求证：$AH + BH + CH = 2(R + r)$.

(1979 年河北省中学生数学竞赛题)

证明　如图 14.27，由圆周角与圆心角的关系，即知

$$\angle A = \angle BOD$$

由定理有

$$AH = 2R\cos A$$

而在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中

$$OD = OB\cos\angle BOD = R\cos A$$

则 $$AH = 2OD$$

同理 $$BH = 2OE, CH = 2OG$$

则 $$AH + BH + CH = 2(OD + OE + OG)$$

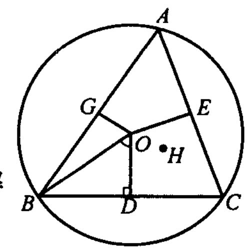


图 14.27

下面只要证明 $OD + OE + OG = R + r$，问题就完满解决了，但事实上，我们有（$S = \frac{1}{2}(a + b + c)$）

$$Sr = \frac{1}{2}a \cdot OD + \frac{1}{2}b \cdot OE + \frac{1}{2}c \cdot OG \qquad ①$$

又因 A、G、O、E，G、B、D、O 和 D、C、E、O 四点分别共圆，由托勒密定理得

$$\frac{1}{2}aR = \frac{1}{2}c \cdot OE + \frac{1}{2}b \cdot OG \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}bR = \frac{1}{2}c \cdot OD + \frac{1}{2}a \cdot OG \qquad ③$$

$$\frac{1}{2}cR = \frac{1}{2}a \cdot OE + \frac{1}{2}b \cdot OD \qquad ④$$

将 ①、②、③、④ 相加即得

$$SR + Sr = S(OD + OE + OG)$$

故 $OD + OE + OG = R + r$，从而问题得证.

例 3　设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证：$AH \cdot BH \cdot AB + BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$

证明　设 $AB = c, BC = a, CA = b$，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则由定理有

$$AH \cdot BH \cdot AB = 4R^2\cos A\cos B \cdot c \qquad ①$$

$$BH \cdot CH \cdot BC = 4R^2\cos B\cos C \cdot a \qquad ②$$

$$CH \cdot AH \cdot CA = 4R^2\cos C\cos A \cdot b \qquad ③$$

① + ② 得

$$AH \cdot BH \cdot AB + BH \cdot CH \cdot BC =$$
$$4R^2\cos B(c \cdot \cos A + a \cdot \cos C) = 4R^2 b\cos B \qquad ④$$

③ + ④ 得

$$AH \cdot BH \cdot AB + BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA =$$
$$4R^2 b(\cos B + \cos A\cos C) =$$
$$4R^2 b[-\cos(A + C) + \cos A\cos C] =$$
$$4R^2 b\sin A\sin C = b(2R\sin A)(2R\sin C) = bac$$

从而结论得证.

[General Information]
书名=走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释：历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解 （上册）
作者=沈文选主编 杨清桃 步凡 昊凡副主编
页数=413
SS号=11859107
出版日期=2007年01月第1版

封面
书名
版权
前言
目录
第１章　１９７８年试题的诠释
第１节　与三角形有关的十个基本定理
第２节　直线束截平行线分线段成比例定理
第３节　完全四边形的优美性质（一）
第４节　凸四边形中的截割线问题
第２章　１９７９年试题的诠释
第１节　几个平行四边形判定的假命题
第２节　面积平分问题
第３节　平移变换
第４节　相交两圆的性质
第３章　１９８１年试题的诠释
第１节　反射变换
第２节　球台上的数学
第４章　１９８２年试题的诠释
第１节　局部调整策略及运用
第２节　三角形中的极值点问题
第５章　１９８３年试题的诠释
第１节　直线束截直线分线段比问题
第２节　凸（凹）四边形的几个问题
第６章　１９８４年试题的诠释
第１节　三角形的与其边平行的内接平行四边形问题
第２节　三角形平行剖分图性质与三角形剖分问题
第７章　１９８５～１９８６年度试题的诠释
第１节　点距比问题
第２节　倍角三角形问题
第３节　与三角形内心有关的几个问题
第４节　正方形中含４５°的三角形问题
第８章　１９８６～１９８７年度试题的诠释
第１节　三角形的高线垂足三角形问题
第２节　图形覆盖问题
第９章　１９８７～１９８８年度试题的诠释
第１节　旋转变换
第２节　角元形式塞瓦定理的推论的推广及应用
第３节　直角三角形中的几个问题
第１０章　１９８８～１９８９年度试题的诠释

第１节　　三角形的界心问题
第２节　　三角形的内接三角形问题
第１１章　　１９８９～１９９０年度试题的诠释
第１节　　阿基米德折弦定理（共点两弦折弦中点定理）
第２节　　圆中张角定理（共点三弦夹角定理）
第３节　　圆内接凸ｎ边形的正弦定理
第４节　　圆中蝴蝶定理的一些证法及圆中蝴蝶定理的衍化
第５节　　四边形中蝴蝶定理的一些问题（推广与演变）
第１２章　　１９９０～１９９１年度试题的诠释
第１节　　卜拉美古塔定理的推广及应用
第２节　　对角线互相垂直的圆内接四边形问题
第１３章　　１９９１～１９９２年度试题的诠释
第１节　　嵌入三角形的平行四边形问题
第２节　　关于三角形外心的几个充要条件
第１４章　　１９９２～１９９３年度试题的诠释
第１节　　圆内接四边形四顶点组成的四个三角形问题
第２节　　圆内接四边形的两个充要条件
第３节　　垂心余弦定理及应用